Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-06-01

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatorn A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \overline{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$A^*Af(x) = \int_0^1 (y-x)Af(y)\,dy = \int_0^1 (y-x)(\int_0^1 (y-z)f(z)\,dz)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (y-x)(y-z)\,dy)f(z)\,dz = \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz)f(z)\,dz,$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatorn ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax+b), \quad \text{alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

   Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x - t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

   Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t - 1, \; 0 < t < 1. \end{cases}$$

   Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = -\displaystyle\int_0^1 g(x,t)(2 + \frac{1}{1+u^2(x)})\, dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

   Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \int_0^1 |g(x,t)| \left| \frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)} \right| dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 |g(x,t)| \left| \frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} \right| dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 |g(x,t)| \left| \frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} \right| dt \|u-v\|_\infty.$$

   Vi noterar att $\left|\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{2a}{1+a^2}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{2b}{1+b^2}\right| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x,t)|\, dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2}(1-x) = \frac{1}{8}$$

   vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u-v\|_\infty.$$

   Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0,1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Låt T vara en avbildning på ett normerat rum X som uppfyller följande villkor: Det finns ett reellt tal C och ett reellt tal $\alpha > 1$ sådana att

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|^{\alpha}, \quad \text{alla } x, y \in X.$$

Vi ska visa att $T(x) = T(\mathbb{0})$ för alla $x \in X$.

Fixera ett godtyckligt $x \in X$. Sätt $\delta = \|T(x) - T(\mathbb{0})\|$. Fixera ett positivt heltal n och sätt $x_k = \frac{k}{n}x \in X$ för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Då gäller

$$\delta = \|T(x_n) - T(x_{n-1}) + T(x_{n-1}) - \ldots - T(x_0)\| \leq$$

$$\leq \Sigma_{k=0}^{n-1}\|T(x_{k+1}) - T(x_k)\| \leq C\Sigma_{k=0}^{n-1}\|x_{k+1} - x_k\|^{\alpha} =$$

$$= C\|x\|^{\alpha} \cdot n^{\alpha-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Detta medför att $\delta = 0$ och påstendet i uppgiften är visat.

Anm: Om $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller

$$|T(x) - T(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \quad \text{alla } x, y \in \mathbf{R}$$

så gäller att

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \left|\frac{T(x+h) - T(x)}{h} - 0\right| = 0, \quad \text{alla } x \in \mathbf{R}$$

dvs. T är en deriverbar funktion med derivatan $= 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ och alltså är T en konstant funktion.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en självadjungerad operator på ett Hilbertrum H för vilken T^n är kompakt för något heltal $n \geq 2$. Vi ska visa att T är kompakt.

Vi noterar att T självadjungerad innebär (per definition) att T är en begränsad operator. T är kompakt om vi kan visa att T^k kompakt implicerar att T^{k-1} är kompakt för godtyckligt heltal $k \geq 2$.

Antag nu att T^k är kompakt för fixt $k \geq 2$. Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd i H, dvs det finns ett reellt tal M sådant att $\|x_n\| \leq M$ för alla n. Då T^k är kompakt finns det en delföljd $\{x_{p_n}\}$ av $\{x_n\}$ för vilken $\{T^k x_{p_n}\}$ konvergerar i H. Då konvergerar också $\{T^{k-1}x_{p_n}\}$ i H eftersom

$$\begin{aligned}\|T^{k-1}x_{p_n} - T^{k-1}x_{p_m}\|^2 = \langle T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle = \\ = \langle T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^k(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle \leq \\ \leq \|T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m})\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\| \leq \\ \leq \|T^{k-2}\| \cdot \|x_{p_n} - x_{p_m}\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k p_{p_m}\| \leq \\ \leq \underbrace{2\|T\|^{k-2}M}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m})\|}_{\to 0,\ n,m\to\infty}\end{aligned}$$

och varje Cauchyföljd i ett Hilbertrum konvergerar. Detta medför att T^{k-1} är kompakt och påståendet i uppgiften är visat.

GLAD SOMMAR!!!

PS Omtentan äger rum den 21/8 på em.