TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2001/2002
Peter Kumlin
Matematiska institutionen CTH& GU

Grundläggande fakta om L^p–rum

Ett genomgående drag hos de väsentliga satserna i denna funktionalanalyskurs — Banach kontraktionssats, Brouwers fixpunktssats, Schauders fixpunktssats, spektralsatsen för kompakta självadjungerade operatorer på Hilbertrum — är att vi har avbildningar definierade på **fullständiga** normerade rum X, med andra ord X ska vara Banachrum. Fullständigheten är här viktig och satserna skulle ej vara sanna utan denna egenskap hos de normerade rummen. Den teknik som ligger till grund för fixpunktssatserna bygger på att man kan lösa problem godtyckligt väl approximativt och därigenom skapa en Cauchyföljd av approximativa lösningar. Existensen av lösningar till de integralekvationer och differentialekvationer som studeras (de senare omformuleras till integralekvationer) bygger på att Cauchyföljderna omtalade ovan konvergerar mot något element i X och detta element är då en lösning till det betraktade problemet.

Exempel på funktionsrum som studerats hitintills i kursen är de linjära rummen av kontinuerliga funktioner, definierade i $\mathbf{R}^n$ eller någon del Ω av $\mathbf{R}^n$, med punktvis definierad addition och multiplikation med skalär. Vi har också noterat att om $C(\Omega)$ förses med sup-normen, dvs

$$\|f\| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|, \quad f \in C(\Omega),$$

så blir det normerade rummet $(C(\Omega), \|\cdot\|)$ ett Banachrum. Däremot om $C(\Omega)$ förses med normen

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(t)|\, dt, \quad f \in C(\Omega),$$

så blir $(C(\Omega), \|\cdot\|_1)$ **inte** ett Banachrum. Se exemplet nedan. Vi antar här att Ω är en snäll kompakt delmängd av $\mathbf{R}^n$ så att integralerna är ändliga. Att inte $(C(\Omega), \|\cdot\|_1)$ är ett Banachrum är olyckligt då denna norm, som vi senare kommer att beteckna med $\|\cdot\|_1$, är ”naturlig” och svarar mot ett ”medelvärde av f” (om f betecknar densitet så svarar $\|f\|_1$ mot totalmassan i Ω). Analogt associerar man i fysiksammanhang $\|f\|_2$ med ”energin hos ett system givet av f”, där

$$\|f\|_2 = (\int_\Omega |f(t)|^2\, dt)^{1/2}, \quad f \in C(\Omega).$$

Rent allmänt är det relevant att studera normer

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(t)|^p\, dt)^{1/p}, \quad f \in C(\Omega),$$

där $p \in [1, \infty)$. Att dessa integraluttryck verkligen definierar norm-funktioner kan visas med en liknande teknik som vi använde för att visa att uttrycken för l^p–normer i sekvensrum är norm-funktioner.

Exempel 1: Betrakta $\Omega = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ och sätt

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2n(t - \frac{1}{2}) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) \\ 1 & t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

för $n = 1, 2, \ldots$ Rita f_n:s graf här!

Vi noterar att $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i det normerade rummet $(C[0, 1], \| \|_1)$ eftersom

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\max(n,m)}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\min(n,m)}} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$$

$$\leq 2(\frac{1}{2\min(n, m)} - \frac{1}{2\max(n, m)}) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Dock saknas en funktion $f \in C[0, 1]$ sådan att $f_n \to f$ i $(C[0, 1], \| \|_1)$. Varför? Vi ser att den punktvisa gränsfunktionen h existerar och ges av

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} ,$$

att

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - h\|_1 = 0$$

men att f_n inte konvergerar mot något $f \in C([0, 1])$ i $\| \cdot \|_1$–normen.

Funktionen h i exemplet ovan är om inte kontinuerlig så i alla fall **Riemann-integrerbar**. Tyvärr blir **inte** heller det normerade rummet

$$(\text{Riemannintegrerbara funktioner}, \| \cdot \|_1) \tag{1}$$

ett Banachrum, vilket följande exempel visar.

Exempel 2: Låt som ovan Ω vara intervallet $[0,1]$ och låt $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ vara en uppräkning av de rationella talen i intervallet $[0,1]$. Sätt

$$f_n(t) = \chi_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & t \notin \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

för $n = 1, 2, \ldots$ och

$$f(t) = \chi_{\{r_1,r_2,r_3,\ldots\}}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \{r_1, r_2, r_3, \ldots\} \\ 0 & t \notin \{r_1, r_2, r_3, \ldots\} \end{cases} .$$

Vi noterar här att f_n är Riemann-integrerbar för varje n och att $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i det normerade rummet (Riemannintegrerbara funktioner, $\|\cdot\|_1$), men att den punktvisa gränsfunktionen f inte är Riemannintegrerbar. Bevisa allt detta! Vi noterar att

- om vi önskar få ett Banachrum med normen $\|\cdot\|_1$ vilket innehåller alla Riemannintegrerbara funktioner bör f vara element i detta rum och $\|f\|_1 = 0$ eftersom $\|f_n\|_1 = 0$ för alla n och f_n går punktvis (till och med monotont) mot f;

- $f \neq \mathbf{0}$ där $\mathbf{0}$ betecknar den funktion på intervallet $[0,1]$ som är punktvis lika med det reella talet 0 överallt. Dock gäller $\|f - \mathbf{0}\|_1 = 0$ varför vi inte kan se skillnad på funktionerna f och $\mathbf{0}$ då vi använder $\|\cdot\|_1$–normen. Med ett språkbruk som vi snart ska lägga oss till med säger vi att funktionerna f och $\mathbf{0}$ skiljer sig åt på en 0-mängd, och vi kommer att **identifiera** dessa båda funktioner. Denna identifiering är man tvungen att göra också för Riemannintegrerbara funktioner i (1) för att $\|\cdot\|_1$ ska ge en norm.

Varken sup–normen eller $\|\cdot\|_1$–normen är normer i Hilbertrum (i ett Hilbertrum gäller relationen $\|\cdot\| = \sqrt{<\cdot,\cdot>}$ mellan normen och inre produkten $<\cdot,\cdot>$, vilket speciellt medför att relationen

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

gäller för alla x, y. Detta är varken fallet för sup–normen eller $\|\cdot\|_1$–normen). Hilbertrumsstrukturen kommer att vara väsentlig för oss i samband med spektralteorin i kapitel 4 i [2]. Däremot kommer $\|\cdot\|_2$ att vara norm i ett Hilbertrum.

Hur kan man då utvidga sitt normerade rum så att man får ett Banachrum. En metod är att abstrakt komplettera det normerade rummet enligt metoden i sektion 7 i kapitel 1 i [2]. Nackdelen med detta är att det kan vara svårt att avläsa egenskaper hos elementen i det kompletterade rummet och det är inte ens direkt klart att elementen i det kompletterade rummet blir punktvis definierade funktioner.

Vi ska nedan synnerligen kortfattat berätta om de viktigaste egenskaperna för Lebesgueintegralerna och L^p–rummen och skissera vissa bevisideer. De som önskar skaffa sig ytterligare kunskaper hänvisas till Folland [3] (kursbok på doktorandnivå), Rudin [5] (också en kursbok på doktorandnivå), Rudin [6] (en lite elementärare bok), Apostol [1] (har använts på grundnivån GU) eller varför inte Hörmander [4]. Framställningarna skiljer sig något åt men nästan alla är baserade på mått–teori.

Lebesguemåttet på $\mathbf{R}^n$

I mått-teorin vill man generalisera begreppen längd av intervall i $\mathbf{R}$, area av rektangel i $\mathbf{R}^2$ etc till en större klass av mängder. Målet är att kunna tilldela så många mängder som möjligt mått där man kräver att mått-funktionen ska uppfylla vissa räkneregler. Om intervallen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ $a,b \in \mathbf{R}$ (tillika intervallen $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b)) ska ha måtten $b-a$ så finns delmängder av de reella talen som inte blir möjliga att tilldela mått! Detta är svårt att visa och förutsätter det så kallade urvalsaxiomet[1].

Låt oss först betrakta en godtycklig mängd X och se vilka delmängder av denna som det vore rimligt att kunna tilldela mått. Intuitivt är det naturligt att om man har en uppräknelig mängd av delmängder av X som alla kan tilldelas mått så borde även alla de mängder man kan få genom uppräkneliga operationer med de vanliga mängdoperationerna union, snitt och komplement på dessa svara mot mängder som kan tilldelas mått. Detta motiverar följande definition.

Definition 1: *En mängd $\mathcal{M}$ av delmängder av X kallas en σ–***algebra** *om*

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M}$ *medför* $X \setminus E \in \mathcal{M}$
3. $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ *medför* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

En mängd i $\mathcal{M}$ kallas en **mätbar mängd**. Låt nu $\mathcal{B}_n$ beteckna den minsta σ–algebra som innehåller alla öppna mängder i $\mathbf{R}^n$. Denna kallas **Borel σ–algebran**. För enkelhets skull inskränker vi oss till fallet $n=1$ men vad som sägs gäller för godtyckligt n. Det finns en väldefinierad minsta sådan σ–algebra

[1] Urvalsaxiomet säger att för varje klass av icke-tomma mängder E_λ, $\lambda \in \Lambda$, kan man skapa en mängd som består av ett element ur varje mängd E.

(bygger på att godtyckliga snitt av σ–algebror är σ–algebror) och $\mathcal{B}_1$ innehåller alla de fyra typer av intervall vi skrev ned ovan.

Givet en σ–algebra $\mathcal{M}$ kan vi tala om ett mått μ på $\mathcal{M}$.

Definition 2: *Ett* **mått** *μ på σ–algebran $\mathcal{M}$ är en avbildning*

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

sådan att

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *$E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ parvis disjunkta medför $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$*

Egenskapen 2. kallas **uppräknelig additivitet** för mått och är en nyckelegenskap i samband med definitionen av Lebesgueintegraler.

Frågan är nu om det är möjligt att visa existensen av ett entydigt bestämt mått på Borel σ–algebran som har egenskapen att alla intervall med intervalländpunkterna a och b, $a < b$, har måttet $b - a$. Svaret är ja och det entydigt bestämda måttet med denna egenskap kallas **Borel måttet**. *Detta är det djupa resultatet som L^p–teorin bygger på!!!* Det så kallade **Lebesgue måttet** är det mått man får genom att komplettera Borel måttet i följande preciserade mening.

Definition 3: *Givet ett mått μ på en σ–algebra $\mathcal{M}$. Då finns σ–algebra $\bar{\mathcal{M}}$ och ett väldefinierat mått $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{M}} \to [0, +\infty]$ så att $E \in \bar{\mathcal{M}}$ om och endast om $E = A \bigcup B$, där $A \in \mathcal{M}$ och $B \subset C \in \mathcal{M}$ med $\mu(C) = 0$, och $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$.*

Det vi har gjort här är att lägga till alla delmängder av mätbara mängder som har måttet 0 på ett sådant sätt att även $\bar{\mathcal{M}}$ blir en σ–algebra. Notera att från definitionen av mått följer att om $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, så gäller $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Vi kallar $\bar{\mathcal{B}}_1$ **Lebesgue σ–algebran** på $\mathbf{R}$ och betecknar den med $\mathcal{L}_1$ och det kompletterade Borel-måttet på $\mathcal{L}_1$ betecknat m kallas **Lebesguemåttet**.

Vi nämnde ovan att det finns delmängder av $\mathbf{R}$ som inte är Lebesgue-mätbara. Följande resultat kan visas.

Sats 1: (Approximation) *Låt $E \subset \mathbf{R}$ vara en Lebesgue-mätbar mängd. Då gäller*

$$m(E) = \inf\{m(U) : E \subset U,\ U \text{ öppen}\} = \sup\{m(K) : K \subset E,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Dessutom om $m(E) < \infty$ så finns för varje $\epsilon > 0$ en öppen mängd A bestående av ändligt många öppna intervall så att

$$m((E \setminus A) \bigcup (A \setminus E)) < \epsilon.$$

Det som sagts här om $\mathbf{R}$ går igenom för $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$ om intervall ersätts med axelparallella rektanglar, axelparallella rätblock etc. Vi betecknar med $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}$ Lebesgue σ–algebran på $\mathbf{R}^n$, som är kompletteringen av Borel σ–algebran $\mathcal{B}_n$, och approximationssatsen ovan har sin naturliga generalisering till $\mathbf{R}^n$.

Lebesguemätbara funktioner

Vi kommer av praktiska skäl att betrakta funktioner f som tar värden i $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ där vi definierar $0 \cdot \infty = 0$. Vad vi måste undvika är odefinierade uttryck som $\infty - \infty$. I detta avsnitt tar samtliga funktioner värden i $\bar{\mathbf{R}}$.

Vi säger att funktionen $f : \mathbf{R}^n \to \bar{\mathbf{R}}$ är **Lebesgue-mätbar** om $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{L}$ för varje $a \in \mathbf{R}$. Här betecknar $f^{-1}(U)$ mängden $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \in U\}$, dvs den inversa bilden av U under f. Av denna definition följer att $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$ för varje Borel-mängd E men framför allt att alla de funktioner man kan bilda från Lebesgue-mätbara funktioner med operationerna

$$+ \quad \cdot \quad \sup_{n=1,2,\ldots} \quad \inf_{n=1,2,\ldots} \quad \limsup_{n=1,2,\ldots} \quad \liminf_{n=1,2,\ldots}$$

är Lebesgue-mätbara. Lite mer explicit uttryckt, givet Lebesguemätbara funktioner f, g, f_n, $n = 1, 2, \ldots$ så är funktionerna

1. $f + g$, fg, λf, där $\lambda \in \mathbf{R}$
2. $\max(f, g)$, $\min(f, g)$
3. $\sup_{n=1,2,\ldots} f_n$, $\inf_{n=1,2,\ldots} f_n$
4. $\limsup_{n\to\infty} f_n \equiv \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n \equiv \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} f_n$

Lebesgue-mätbara. Man kan visa att **varje kontinuerlig funktion är Lebesgue-mätbar**! Det enklaste men viktiga exemplet på Lebesgue-mätbara funktioner är de s k **enkla funktionerna** som ges av ändliga linjärkombinationer av karakteristiska funktioner för Lebesgue-mätbara mängder, dvs funktioner av typen

$$\Sigma_{n=1}^{N} \lambda_n \chi_{E_n}$$

där $\chi_E(t) = 1$ om $t \in E$ och $= 0$ om $t \notin E$. Vi förutsätter här att $\lambda_i \neq \lambda_j$ för $i \neq j$. Förvissa dig om att enkla funktioner verkligen är Lebesgue-mätbara! Nyckelobservationen som visar att de enkla funktionerna är viktiga ges av följande approximationsresultat.

Sats 2: (Approximation) *Låt $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$ vara en Lebesgue-mätbar funktion. Då finns en följd av enkla funktioner ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$ sådana att*

1. $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3 \leq \ldots$
2. $\lim_{n\to\infty} \phi(t) = f(t)$ *för alla* $t \in \mathbf{R}^n$
3. ϕ_n *konvergerar likformigt mot* f *på varje mängd* $A \subset \mathbf{R}^n$ *där funktionen* f *är begränsad.*

Vi observerar att om vi har en växande följd av enkla funktioner så är gränsfunktionen också en Lebesgue-mätbar funktion, men även omvändningen gäller, dvs att en funktion (om den är nedåt begränsad av en konstant) kan fås som gränsfunktionen till en växande följd av enkla funktioner. Beviset för satsen ovan är enkelt. Sätt

$$\phi_n = \Sigma_{k=0}^{2^{2n-1}} k2^{-n}\chi_{E_n^k} + 2^n\chi_{F_n},$$

där

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}])$$

och

$$F_n = f^{-1}((2^n, \infty]).$$

för $n = 1, 2, \ldots$. Givet något f, rita graferna till funktionerna ϕ_n!

Vi introducerar nu språkbruket **nästan överallt**, matematiskt betecknat n.ö., vilket betyder överallt utom på en mängd av måttet 0. Att två funktioner f och g är lika nästan överallt betyder att mängden där de är olika inte behöver vara tom men ha Lebesgue-måttet 0. P.s.s. betyder $f_n \to f$ punktvis n.ö. att mängden där vi inte har punktvis konvergens är en 0–mängd (med avseende på Lebesgue-måttet). Eftersom varje delmängd av en Lebesgue-mätbar 0–mängd är en 0–mängd gäller att

1. f Lebesgue-mätbar och $f = g$ n.ö. medför g Lebesgue-mätbar
2. f_n, $n = 1, 2, \ldots$, Lebesgue-mätbara och $f_n \to f$ punktvis n.ö. medför f Lebesgue-mätbar

Slutligen om $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ kallas f Lebesgue-mätbar om både Ref och Imf är Lebesgue-mätbara. Detta är liktydigt med att $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}$ för varje öppen mängd U i $\mathbf{C}$.

Integraler och konvergenssatser

En komplexvärd funktion f kan entydigt delas upp i sin realdel och sin imaginärdel

$$f = \mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f,$$

där bägge dessa är reellvärda. Dessa kan i sin tur delas upp i den positiva delen och den negativa delen. Om f är reellvärd betecknar vi

$$f^+ = \max(f, 0)$$

och

$$f^- = \max(-f, 0).$$

Följdaktligen gäller $f = f^+ - f^-$ (och $|f| = f^+ + f^-$). Eftersom vi vill att integraloperatorn

$$f \mapsto \int f\, dm$$

ska vara en linjär operator på (de hitintills ej definierade) Lebesgue-integrabla funktionerna måste gälla att

$$\int f\, dm = \int (\mathrm{Re} f)^+\, dm - \int (\mathrm{Re} f)^-\, dm + i(\int (\mathrm{Im} f)^+\, dm - \int (\mathrm{Re} f)^-\, dm).$$

Det räcker följdaktligen att definiera

$$\int f\, dm$$

för Lebesgue-mätbara funktioner $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$. Detta görs i två steg.

Steg 1 Om $f = \Sigma_{n=1}^N \lambda_n \chi_{E_n}$, dvs f är en enkel funktion, definierar vi

$$\int f\, dm = \Sigma_{n=1}^N \lambda_n m(E_n).$$

Steg 2 Om f är en Lebesgue-mätbar funktion definierar vi

$$\int f\, dm = \sup\{\int \phi\, dm : \phi \text{ enkel funktion}, \ 0 \le \phi \le f\}.$$

Man kan (utan svårighet) visa att integralen blir väldefinierad. Integralen kan anta värdet $+\infty$ eftersom vi inte antagit någon storleksbegränsning på f. Vi låter L^+ beteckna mängden av alla reella Lebesgue-mätbara funktioner som tar värden i $[0, \infty]$.

Av definitionen följer att $f, g \in L^+$ och $f \le g$ medför

$$\int f\, dm \le \int g\, dm.$$

Vidare låter vi L^1 beteckna mängden av alla Lebesgue-mätbara funktioner $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ sådana att

$$\max(\int \mathrm{Re} f^+ \, dm, \int \mathrm{Re} f^- \, dm, \int \mathrm{Im} f^+ \, dm, \int \mathrm{Im} f^- \, dm) < \infty,$$

vilket är ekvivalent med

$$\int |f| \, dm < \infty.$$

Vi noterar att

$$|\int f \, dm| \leq \int |f| \, dm.$$

Slutligen definierar vi

$$\int_E f \, dm = \int f \chi_E \, dm,$$

för E Lebesgue-mätbar mängd i $\mathbf{R}^n$.

Frågan man ställer sig nu är: Vad skiljer **Lebesgue-integralen** ifrån **Riemann-integralen**? Svaret ligger fördolt i definitionerna. Låt oss för tillfället anta att f tar värden i $[0, M]$ för $M > 0$. Kom ihåg att Riemannintegraldefinitionen baseras på att man delar upp x–axeln i en union av små intervall I_k, sätter $M_k = \sup_{I_k} f$ och $m_k = \inf_{I_k} f$ och uppskattar

$$\int f \, dx \approx \Sigma_k M_k |I_k|$$

förutsatt att $\Sigma_k M_k |I_k| \approx \Sigma_k m_k |I_k|$, där $|I_k|$ betecknar längden av intervallet I_k. Med $\approx$ menar vi att skillnaden går mot 0 då $\sup_k |I_k| \to 0$. För att detta ska gälla krävs att f är nästan konstant på alla intervall I_k (dvs $M_k - m_k \approx 0$) eller att mängden av intervall där detta inte gäller (dvs $M_k - m_k \not\approx 0$) är litet. Ett annat sätt att uttrycka detta är att f måste vara kontinuerlig utom i ett litet antal punkter som har Lebesgue-måttet 0. Med vårt nya språkbruk kan vi säga att f är Riemann-integrerbar om den mängd där f är diskontinuerlig är en 0–mängd med avseende på Lebesgue-måttet. I det tidigare exemplet med $f = \chi_{\mathbf{Q} \bigcap [0,1]}$ är mängden med diskontinuitetspunkter hos f lika med intervallet $[0, 1]$ som har Lebesgue-måttet lika med 1 och inte 0.

Lebesgueintegraldefinitionen bygger på att man istället delar in y–axeln med små intervall $I_n^k = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$. Här svarar n mot hur fint denna uppdelning gjorts, intervall-längden är lika med 2^{-n}, och k ger positionen på y–axeln. Jämför med beteckningarna i beviset för satsen ovan. Med definitionen av de enkla funktionerna ϕ_n ovan (vi antar att f antar icke-negativa värden och $M < 2^n$) har vi

$$\int f \, dm \approx \Sigma_k k 2^{-n} m(E_n^k),$$

där vi noterar att $|f-\phi_n| \leq 2^{-n}$ på E_n^k. För att summan ovan ska ha mening krävs att $m(E_n^k)$ och $m(F_n)$ har mening, vilket **garanteras** av att f antogs vara Lebesgue-mätbar. Om vi återgår till funktionen $f = \chi_{\mathbf{Q}\bigcap[0,1]}$ ser vi att denna tar värdet 0 utom i de rationella punkterna på intervallet $[0,1]$, de vi tidigare betecknade med $\{r_1, r_2, \ldots\}$. Men varje mängd $\{r_n\}$ är en Lebesgue-mätbar mängd med måttet lika med 0 och en uppräknelig union av 0–mängder är en 0–mängd. Alltså gäller $\int f\, dm = 0$.

Vi noterar att varje kontinuerlig funktion som är 0-skild endast i en kompakt delmängd av $\mathbf{R}^n$ är Riemannintegrerbar, och att varje Riemannintegrerbar funktion (med ändlig $\|\cdot\|_1$–norm) är Lebesgueintegrerbar **och**

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \int f\, dm.$$

Här betecknar det vänstra ledet Riemannintegralen av f och det högra ledet betecknar Lebesgueintegralen av f.

Vi listar nu ett antal satser som kommer att vara användbara för oss i samband med tillämpningar. Det är viktigt att notera att Lebesgueintegralen svarar mot en **utvidgning** av Riemannintegralen med egenskaper som vi önskade: kraftfulla konvergenssatser och att funktionsrummet $(L^1, \|\cdot\|_1)$ fullständigt.

Sats 3: (Lebesgues monotona konvergenssats) *Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^+$ vara en monotont växande följd av funktioner. Då gäller*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, dm.$$

Sats 4: (Fatous lemma): *Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^+$ vara en följd av funktioner. Då gäller*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, dm.$$

Sats 5: (Lebesgues dominerade konvergenssats) *Antag att $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd av komplex-värda Lebesgue-mätbara funktioner och att $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ nö. Antag vidare att det finns en Lebesgue-mätbar funktion g sådana att*

$$|f_n| \leq g \in L^1 \qquad \text{alla } n.$$

Då gäller

$$f \in L^1$$

och
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,dm = \int f\,dm.$$

Sats 6: (derivering under integraltecknet) *Antag att* $f(t,x):\mathbf{R}^n\times[a,b]\to\mathbf{C}$ *och att* $f(\cdot,x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ *är en* L^1*–funktion för varje* $x\in[a,b]$*. Sätt* $F(x)=\int f(t,x)\,dm(t)$*.*

- *Antag att det finns* $g\in L^1$ *så att*
$$|f(t,x)|\le g(t)\quad \text{alla}\, t,x.$$
Då gäller
$$\lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$$
om
$$\lim_{x\to x_0} f(t,x)=f(t,x_0)\quad \text{alla}\, t.$$

- *Antag att* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *existerar och att det finns* $g\in L^1$ *så att*
$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|\le g(t)\quad \text{alla}\, t,x.$$
Då är F *deriverbar och*
$$F'(x)=\int \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dm(t).$$

Vi antar nu att $n=1$ och erinrar oss att en reell funktion f är kontinuerligt deriverbar om och endast om
$$f(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$
där g är en kontinuerlig reell funktion. Vidare är här $f'=g$. Vad gäller då för funktionen
$$\int_a^x g(t)\,dt$$
där $g\in L^1$?

För att ge svaret på denna fråga inför vi begreppet **absolut-kontinuerlig funktion**. Vi säger att den reella funktionen f är absolut-kontinuerlig om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$\Sigma|b_n - a_n| < \delta$$

medför att

$$\Sigma|f(b_n) - f(a_n)| < \epsilon.$$

Speciellt innebär detta att f är kontinuerlig och dessutom likformigt kontinuerlig på sin definitionsmängd. $\Sigma \ldots$ står för summan av en ändlig serie.

Sats 7: *En reell funktion $f(x)$ är given av $\int_a^x g\,dm$ där g är en lokalt Lebesgue-integrabel funktion om och endast om f är absolut-kontinuerlig. Om så är fallet gäller att $f' = g$ n.ö.*

Från flervariabelanalyskursen minns vi att multipelRiemannintegraler kunde beräknas genom upprepad integration av enkelintegraler. Gäller detta även för Lebesgue-integraler? Svaret ges av följande sats.

Sats 8: (Fubini–Tonellis sats) *Antag att $f(\cdot,\cdot)$ är Lebesgue-mätbar och antag att ett av följande villkor är uppfyllt:*

1. *(Tonelli) $f \geq 0$*
2. *(Fubini) en av integralerna $\int |f(x,y)|\,dm(x,y)$, $\int(\int |f(x,y)|\,dm(y))\,dm(x)$, $\int(\int |f(x,y)|\,dm(x))\,dm(y)$ är ändliga.*

Då är funktionerna $f(\cdot,y)$, $f(x,\cdot)$, $\int f(\cdot,y)\,dm(y)$ och $\int f(x,\cdot)\,dm(x)$ Lebesgue-mätbara och

$$\int |f(x,y)|\,dm(x,y) = \int(\int |f(x,y)|\,dm(y))\,dm(x) = \int(\int |f(x,y)|\,dm(x))\,dm(y).$$

L^p–rum, Hölders och Youngs olikheter

För Lebesgue-mätbara funktioner f definierar vi

$$\|f\|_p = (\int |f|^p\,dm)^{1/p} \quad p \in [1,\infty)$$

och

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

Här betecknar ess sup för reell-värda icke-negativa funktioner f kvantiteten

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{k : k \geq f \quad \text{n.ö.}\}.$$

Vi kan nu definiera L^p–rummen som mängden av alla Lebesgue-mätbara funktioner så att $\|f\|_p < \infty$. Detta gäller för $1 \leq p \leq \infty$. Vi noterar nu att

- $\|f - g\|_p = 0$ om och endast om $f = g$ n.ö. Vi identifierar därför funktioner i L^p som är lika n.ö. för att $\|\cdot\|_p$ ska kunna definiera en norm på L^p.
- $f \in L^p$ medför att $|f| < \infty$ n.ö.
- $f \in L^\infty$ och f kontinuerlig medför att $\|f\|_\infty = \sup |f|$. Om f ej är kontinuerlig gäller att mängden där $f(x) > \|f\|_\infty$ är en 0–mängd.

Vi kan nu se att $\|\cdot\|_p$ verkligen definierar en norm. Om $p = \infty$ är detta trivialt. För $p \in [1, \infty)$ är detta en konsekvens av **Hölders olikhet**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

där $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p, q \geq 1$, som kan visas med liknande metoder som de som användes för sekvensrummen l^p. Detta leder till att man kan visa **Minkowskis olikhet**

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

för $p \in [1, \infty)$.

Vi har nu definierat L^p som normerade rum. Med L^p_{lok} betecknar vi mängden av alla Lebesgue-mätbara funktioner f för vilka $f\chi_E \in L^p$ för alla kompakta Lebesgue-mätbara mängder E i $\mathbf{R}^n$.

Sats 8: *L^p med normen $\|\cdot\|_p$ är Banachrum för $p \in [1, \infty]$ och dessutom separabla (finns uppräknelig tät delmängd) för $p \in [1, \infty)$. Om $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ är en Cauchyföljd i L^p för $p \in [1, \infty)$ finns det en delföljd $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ som konvergerar punktvis n.ö.*

Försök bevisa detta!

Givet en komplex-värd funktion f definierad i $\mathbf{R}^n$. Vi kallar det slutna höljet av mängden $\{x : f(x) \neq 0\}$ för **stödet för** f och låter C_0^∞ beteckna mängden av alla oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara funktioner med kompakt stöd.

Sats 9: *För $p \in [1, \infty)$ gäller att*

1. *$L^p \bigcap \{$ enkla funktioner $\}$ och*
2. *C_0^∞*

är täta i L^p.

Slutligen vill vi ge några olikheter som kan vara praktiska att ha till hands vid konkreta kalkyler.

Youngs olikhet: Antag att $k : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ är Lebesgue-mätbar och antag att

$$\max(\sup_x \int |k(x,y)|\, dm(y), \sup_y \int |k(x,y)|\, dm(x)) = M < \infty.$$

Om $f \in L^p$ för något $p \in [1, \infty]$ så ligger

$$F(x) = \int k(x,y) f(y)\, dm(y)$$

i L^p och

$$\|F\|_p \leq M \|f\|_p.$$

Chebyshevs olikhet: Givet $f \in L^p$, $p \in [1, \infty)$, och $\alpha > 0$. Då gäller

$$m(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leq (\frac{\|f\|_p}{\alpha})^p.$$

När vi nu ser tillbaka på vilka funktioner som är Lebesgue-integrabla noterar vi att dessa kan vara mycket ”vilda” även om det i L^p-norm finns kontinuerliga funktioner godtyckligt nära. Ofta är det så i tillämpningar att man vill visa att en viss funktion, som man i förstone bara vet ligger i L^p, är kontinuerlig. Denna slutsats kan följa av den konkreta problemställningen. Vad L^p–teorin då bistått med är existensen av en funktion, som man sedan kan visa, har vissa önskade egenskaper.

References

[1] T.Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley 1974

[2] L.Debnath/P.Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications 2nd ed.*, Academic Press 1999

[3] G.Folland, *Real Analysis – Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons 1984

[4] L.Hörmander/T.Claesson, *Integrationsteori*, Matematiska institutionen Lund 1993

[5] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill 1987

[6] W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill 1976