TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2001/2002
Peter Kumlin
Matematiska institutionen CTH& GU
(skrivet av C.Borell 1996)

# Tillämpningar av spektralsatsen på ordinära differentialekvationer

Antag $c_0, \ldots, c_n \in C(I)$, där $I = [a, b]$, $n \geq 2$ fixerat och

$$c_n(x) \neq 0, \text{ alla } x \in I.$$

Sätt

$$Lu = c_n u^{(n)} + \ldots + c_0 u,\ u \in C^n(I).$$

Syftet med denna stencil är att visa att operatorn $L$ under lämpliga villkor har en så kallad Greenfunktion, som, i fallet av symmetri, kan spektralframställas med hjälp av spektralsatsen för kompakta symmetriska operatorer i Hilbertrum ([1] sats 4.10.2).

## Existens av Greenfunktion

Vi inleder detta avsnitt med följande fundamentala existenssats för ordinära differentialekvationer.

**Sats 1:** *Antag $t_0 \in I$ och $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$. Om $f \in C(I)$ finns unikt $u \in C^n(I)$ så att $Lu = f$ och $(u(t_0), u'(t_0), \ldots, u^{(n-1)}(t_0)) = \xi$.*

**Bevis:** Sätt $y_1 = u$, $y_2 = u', \ldots, y_n = u^{(n-1)}$. Ekvationen $Lu = f$ kan ekvivalent skrivas

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ \\ y_n' = -\frac{c_0}{c_n} y_1 - \ldots - \frac{c_{n-1}}{c_n} y_n + \frac{1}{c_n} f \end{cases}$$

eller, med beteckningen $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$y' = F(t, y),\ t \in I$$

för en lämplig vektorvärd funktion $F$, som uppfyller ett så kallas Lipschitzvillkor av typen

$$|F(t, y) - F(t, z)| \leq K|y - z|,\ t \in I,\ y, z\mathbf{R}^n.$$

Notera vidare att villkoret $(u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)) = \xi$ kan skrivas $y(t_0) = \xi$. Picard's existenssats ([1] sats 5.2.5) på vektorform medför nu sats 1. $\square$

I fortsättningen låter vi

$$\mathcal{N}(L) = \{u \in C^n(I); Lu = 0\}.$$

**Korollarium 1**: $\dim \mathcal{N}(L) = n$.

**Bevis:** Fixera $t_0 \in I$ och definiera

$$Tu = (u(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)),\ u \in \mathcal{N}(L).$$

Den linjära avbildningen $T : \mathcal{N}(L) \to \mathbf{C}^n$ är p.g.a. sats 1 omvändbart entydig och den har värdemängden $\mathbf{C}^n$. Alltså är $\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathbf{C}^n = n$. $\square$

För godtyckliga funktioner $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{N}(L)$ införs nu den så kallade **Wronskianen** av $u_1, \dots, u_n$, nämligen

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & & u_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},\ t \in I.$$

**Sats 2:** *Följande villkor är ekvivalenta:*

(a) $W(t) \neq 0$ *för alla* $t \in I$.

(b) $W(t) \neq 0$ *för något* $t \in I$.

(c) $u_1, \dots, u_n$ *är en bas för vektorrummet* $\mathcal{N}(L)$.

**Bevis:** (a) $\Rightarrow$ (b): trivialt.

(b) $\Rightarrow$ (c): Låt $u \in \mathcal{N}(L)$. Eftersom $\dim \mathcal{N}(L) = n$ räcker det att visa att $u$ är en linjärkombination av $u_1, \dots, u_n$.

Antag nu $t \in I$ är fixt och sådant att $W(t) \neq 0$. Enligt kurser i linjär algebra finns $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}^n$ så att

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u_k(t), \dots, u_k^{(n-1)}(t)) = (u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)).$$

Funktionen $v = \sum_1^n \alpha_k u_k \in \mathcal{N}(L)$ uppfyller alltså relationen

$$(v(t), \dots, v^{(n-1)}(t)) = (u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

och därför måste enligt sats 1 $v = u$. Således gäller att $u \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Antag $t \in I$ är godtyckligt. Vi skall visa att $W(t) \neq 0$. Det räcker därför att visa att kolonnerna i determinanten $W(t)$ är linjärt oberoende.

Antag $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}^n$ och

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u_k(t), \dots, u_k^{(n-1)}(t)) = 0.$$

Funktionen $v = \sum_1^n \alpha_k u_k \in \mathcal{N}(L)$ uppfyller $v(t) = \dots = v^{(n-1)}(t) = 0$ och är därför nollfunktionen enligt sats 1. Av $\sum_1^n \alpha_k u_k = 0$ följer emellertid att $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Kolonnerna i determinanten $W(t)$ är alltså linjärt oberoende. $\square$

Från och med nu betecknar

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i = 0, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, n$$

komplexa tal och vi inför följande randoperatorer, nämligen

$$R_j u = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij} u^{(i)}(a) + \beta_{ij} u^{(i)}(b)],\ j = 1, \dots, n.$$

Vi inför också beteckningarna

$$Ru = (R_1 u, \dots, R_n u)$$

$$C_R^n(I) = \{u \in C^n(I) : Ru = 0\}$$

och

$$L_0 u = Lu, \; u \in C^n_R(I).$$

**Sats 3:** *Följande villkor är ekvivalenta:*

(a) *avbildningen $L_0 : C^n_R(I) \to C(I)$ är bijektiv (dvs omvändbart entydig med värdemängden $C(I)$).*

(b) $\det\{R_j u_k\}_{1\le j,k\le n} \neq 0$ *för varje (alternativt för någon) bas $u_1, \ldots, u_n$ i $\mathcal{N}(L)$.*

**Bevis:** (a) $\Rightarrow$ (b): Om determinanten i (b) är noll finns $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ ej alla lika med noll så att

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_j u_k = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Funktionen $v = \sum_1^n \alpha_k u_k$ uppfyller $Lv = 0$ och $Rv = 0$. Eftersom $v \neq 0$ och $L_0 v = 0$ har vi fått en motsägelse.

(b) $\Rightarrow$ (a): Välj $f \in C(I)$ godtyckligt. Det gäller att visa att ekvationen

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}$$

är entydigt lösbar. Sättes $w = u - v$, där $v \in C^n(I)$ uppfyller $Lv = f$ (sats 1), erhålles den ekvivalenta ekvationen

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ Rw = -Rv. \end{cases}$$

Ansättes slutligen att $w = \sum_1^n \alpha_k u_k$ så leder determinantvillkoret i (b) omedelbart till en unik lösning. $\square$

Antag nu att $u_1, \ldots, u_n$ är en bas för vektorrummet $\mathcal{N}(L)$ och sätt

$$e(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) u_k(x)$$

där $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ väljes så att

$$\begin{cases} e_x^{(k)}(t,t) = 0, \; k = 0, 1, \ldots, n-2 \\ e_x^{(n-1)}(t,t) = 1/c_n(t). \end{cases}$$

Notera att funktionerna $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ är kontinuerliga i $t$ beroende på t.ex. Cramers regel. Notera också att för fixt $t \in I$ så är funktionen $u(x) = e(x,t)$ den entydigt bestämda lösningen till ekvationen

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(t) = \ldots = u^{(n-2)}(t) = 0,\ u^{(n-1)}(t) = 1/c_n(t). \end{cases}$$

Funktionen $e(x,t), (x,t) \in I \times I$, kallas ofta för **fundamentallösningen** till operatorn $L$. Denna funktion är bl.a. intressant i samband med randvärdesproblem som vi strax skall se.

**Sats 4:** *Antag $u_1, \ldots, u_n$ är en bas för $\mathcal{N}(L)$ sådan att*

$$\det\{R_j u_k\}_{1 \le j,k \le n} \ne 0$$

*och sätt $G = L_0^{-1}$. Det finns en unik kontinuerlig funktion $g(x,t), (x,t) \in I \times I$, sådan att*

$$(Gf)(x) = \int_I g(x,t) f(t) dt.$$

*Denna så kallade Greenfunktion $g$ erhålls på följande sätt:*

(a) *Sätt $\tilde{e}(x,t) = \theta(x-t)e(x,t)$, där $\theta$ är Heavisides funktion*

(b) *Bestäm $b_1, \ldots, b_n \in C(I)$ så att funktionen*

$$g(x,t) = \tilde{e}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_k(x)$$

*uppfyller*

$$R(g(\cdot,t)) = 0,\ a < t < b.$$

**Bevis:** Inför först

$$\tilde{u}(x) = \int_I \tilde{e}(x,t) f(t) dt$$

dvs

$$\tilde{u}(x) = \int_a^x e(x,t) f(t) dt.$$

Derivation upprepade gånger ger

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(x) &= \int_a^x e_x'(x,t)f(t)dt + \underbrace{e(x,x)}_{=0}f(x) \\
\tilde{u}''(x) &= \int_a^x e_x''(x,t)f(t)dt + \underbrace{e_x'(x,x)}_{=0}f(x) \\
&\vdots \\
\tilde{u}^{(n-1)}(x) &= \int_a^x e_x^{(n-1)}(x,t)f(t)dt + \underbrace{e^{(n-2)}(x,x)}_{=0}f(x)
\end{aligned}$$

och

$$\tilde{u}^{(n)}(x) = \int_a^x e^{(n)}(x,t)f(t)dt + \frac{1}{c_n(x)}f(x).$$

Härav fås omedelbart att $L\tilde{u} = f$. Funktionen

$$u(x) = \int_I g(x,t)f(t)dt$$

uppfyller ekvationen $Lu = f$ ty

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \int_I b_k(t)f(t)dt.$$

Då slutligen

$$Ru = \int_{a^+}^{b^-} \underbrace{R(g(\cdot,t))}_{=0} f(t)dt$$

följer satsen. $\square$

Funktionen $g$ i sats 4 kallas för **Greenfunktionen till randvärdesproblemet**

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0. \end{cases}$$

**Problem 1:** Bestäm Greenfunktionen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -((1+x)u'(x))' = f(x),\ 0 \le x \le 1 \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

**Lösning:** Funktionerna $u_1(x) = 1$ och $u_2(x) = \ln(1+x)$ bildar en bas av lösningar till den homogena ekvationen $-((1+x)u'(x))' = 0$. Notera att

$$\begin{vmatrix} u_1'(0) & u_2'(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \ln 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Det finns således en Greenfunktion i det aktuella fallet.

Fundamentallösningen $e(x,t) = a_1(t)u_1(x) + a_2(t)u_2(x)$ har formen

$$e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)\ln(1+x)$$

och villkoren $e(t,t) = 0$, $e_x'(t,t) = -\frac{1}{1+t}$ ger lätt att

$$e(x,t) = \ln(1+t) - \ln(1+x).$$

Greens funktion får därför formen

$$g(x,t) = \theta(x-t)(\ln(1+t) - \ln(1+x)) + b_1(t) + b_2(t)\ln(1+x)$$

där

$$\begin{cases} g_x'(0,t) = 0 \\ g(1,t) = 0, \end{cases}$$

för $0 < t < 1$. Härav följer att

$$\begin{cases} b_2(t) = 0 \\ \ln(1+t) - \ln 2 + b_1(t) + b_2(t)\ln 2 = 0 \end{cases}$$

varav

$$b_1(t) = \ln\frac{2}{1+t},\ b_2(t) = 0.$$

Alltså är

$$g(x,t) = \theta(x-t)\ln\frac{1+t}{1+x} + \ln\frac{2}{1+t}.$$

**Problem 2:** Antag att $\lambda \in \mathbf{C}$ och $f \in C([0,1])$. Visa, att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x),\ 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0,\ u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en unik lösning om $|\lambda| < e(e-1)$.

**Lösning:** Vi söker först Greenfunktionen till ekvationen

$$\begin{cases} u'' + u' = F(x),\ 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Funktionerna $u_1(x) = 1$ och $u_2(x) = e^{-x}$ bildar en bas av lösningar till den homogena ekvationen $u'' + u' = 0$. Med standardbeteckningar fås att

$$e(x,t) = 1 - e^{t-x}$$

och

$$g(x,t) = \theta(x-t)(1 - e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e - e^t}{e-1} e^{-x}.$$

Notera att

$$t > x \Rightarrow g(x,t) = \frac{e^t - e}{e-1}(1 - e^{-x}) \le 0$$

och

$$t \le x \Rightarrow g(x,t) = \frac{e^t - 1}{e-1}(1 - e^{1-x}) \le 0$$

varför $g \le 0$.

Sätt nu för varje $u \in C([0,1])$

$$(Tu)(x) = \int_0^1 g(x,t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt,\ 0 \le x \le 1$$

och notera att $T$ avbildar $C([0,1])$ på $\{u \in C^2([0,1]);\ u(0) = u(1) = 0\}$. Ekvationen i problem 2 är således unikt lösbar omm $T$ har en unik fixpunkt. Om $u, v \in C([0,1])$ gäller emellertid att

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt| \le$$
$$\le |\lambda| \int_0^1 (-g(x,t))||v(t)| - |u(t)||dt \le |\lambda| j(x) \|u - v\|_\infty,$$

där $\| \|_\infty$ betecknar max-normen på $C([0,1])$ och

$$j(x) = -\int_0^1 g(x,t)dt.$$

Eftersom $j(0) = j(1) = 0$ och $j'' + j' = -1$ följer att

$$j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1} e^{-x}$$

och

$$\max_{[0,1]} j = j\left(\ln\frac{e}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1} + \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}.$$

Av ovanstående erhålles nu att

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{|\lambda|}{e(e-1)}\|u-v\|_\infty$$

och Banachs fixpunktssats ([2]) medför att $T$ har en unik fixpunkt för $|\lambda| < e(e-1)$.

## Spektralteori för ordinära differentialekvationer

Den linjära operatorn $L_0 : C_R^n(I) \to C(I)$ säges vara **symmetrisk** om

$$(L_0 u, v) = (u, L_0 v), \quad \text{alla} \;\; u, v \in C_R^n(I),$$

där skalärprodukten ges av

$$(f, h) = \int_a^b f(x)\overline{h(x)}dx.$$

I de fall $L_0$ är bijektiv betecknar $g$ Greenfunktionen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}$$

och vi sätter

$$(Gf)(x) = \int_a^b g(x,t)f(t)dt, \; f \in C(I)$$

och

$$(\tilde{G}f)(x) = \int_a^b g(x,t)f(t)\,dt, \; f \in L^2(I).$$

**Sats 5:** *Antag $L_0$ är bijektiv. Följande villkor är ekvivalenta:*

(a) $L_0$ *är symmetrisk*

(b) $\tilde{G}$ *är självadjungerad*

(c) $g(x,t) = \overline{g(t,x)}$, $x, t \in I$.

**Bevis:** (a) $\Leftrightarrow$ (b): $L_0$ är symmetrisk om och endast om

$$(L_0 Gf, Gh) = (Gf, L_0 Gh),\ f, h \in C(I)$$

dvs om och endast om

$$(f, Gh) = (Gf, h),\ f, h \in C(I).$$

Denna relation är ekvivalent med att

$$(f, \tilde{G}h) = (\tilde{G}f, h),\ f, h \in L^2(I)$$

ty $C(I)$ är tät i $L^2(I)$ och $\tilde{G}$ är en begränsad linjär operator på $L^2(I)$ ([1] exampel 4.2.4) vars restriktion till $C(I)$ är lika med $G$. Symmetri för $L_0$ är alltså ekvivalent med att $\tilde{G}$ är självadjungerad.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Notera först att

$$(\tilde{G}^* f)(x) = \int_a^b \overline{g(t,x)} f(t) dt$$

([1] exampel 4.4.3). Alltså är $\tilde{G} = \tilde{G}^*$ om och endast om

$$\int_a^b (g(x,t) - \overline{g(t,x)}) f(t) dt = 0,\ f \in L^2(I).$$

Eftersom $g$ är kontinerlig betyder detta att $g(x,t) - \overline{g(t,x)} = 0$ för alla $x, t \in I$ dvs att $g(x,t) = \overline{g(t,x)}$ för alla $x, t \in I$. $\square$

**Example 1:** Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0,\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Här är $Lu = -u''$, $R_1 u = u(0)$ och $R_2 u = u(1)$. Operatorn $L_0$ är symmetrisk ty

$$(L_0 u, v) = \int_0^1 -u'' \bar{v} dx = \big[ -u' \bar{v} \big]_0^1 + \int_0^1 u' \bar{v}' dx =$$

$$(u', v') = \overline{(v', u')} = \overline{(L_0 v, u)} = (u, L_0 v)$$

för alla $u, v \in C^2_R([0,1])$. Detta resultat kan också erhållas från sats 5 genom att konstatera att $L_0$ är bijektiv och att Greenfunktionen $g$ ges av

$$g(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \le t < x \le 1 \\ (1-t)x, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Som synes gäller att $g(x,t) = \overline{g(t,x)}$. Detaljerna lämnas som övning.

**Sats 6:** *Antag $L_0$ är symmetrisk och bijektiv. Då gäller följande:*

(a) *0 är varken egenvärde till $L_0$ eller till $\tilde{G}$.*

(b) *$f$ är en egenfunktion till $L_0$ med egenvärdet $\mu$ om och endast om $f$ är en egenfunktion till $\tilde{G}$ med egenvärdet $1/\mu$.*

**Bevis:** (a): Eftersom $\mathcal{N}(L_0) = \{0\}$ saknar $L_0$ egenfunktion med egenvärdet noll.

Antag nu $f \in \mathcal{N}(\tilde{G})$. Vi skall visa att $f = 0$. För den skull väljes $\phi \in C^n_R(I)$ godtyckligt och vi får

$$\begin{aligned} 0 =&(0, L_0\phi) = (\tilde{G}f, L_0\phi) = (f, \tilde{G}L_0\phi) = \\ &(f, GL_0\phi) = (f, \phi). \end{aligned}$$

Eftersom $C^n_R(I)$ är tät i $L^2(I)$ följer nu att $f = 0$.

(b): $\Rightarrow$) Av

$$0 \ne f = G(L_0 f) = G(\mu f) = \mu G f = \mu \tilde{G} f$$

följer att $f$ är en egenfunktion till $\tilde{G}$ med egenvärdet $1/\mu$.

$\Leftarrow$) Vi har

$$\int_a^b g(x,t) f(t)dt = \frac{1}{\mu} f(x) \quad \text{n.ö. i } I.$$

Sättes

$$h(x) = \mu \int_a^b g(x,t) f(t)dt, \; x \in I$$

så följer av t.ex. Lebesgues majorantsats (se [3]) att $h \in C(I)$. Vidare är $h(x) = f(x)$ n.ö. i $I$ och

$$h(x) = \mu \int_a^b g(x,t) h(t)dt, \; x \in I$$

varför $Gh = \frac{1}{\mu}h$. Härav fås

$$h = L_0(Gh) = L_0\left(\frac{1}{\mu}h\right) = \frac{1}{\mu}L_0 h.$$

Eftersom $h \neq 0$ i $C_R^n(I)$ är $h$ en egenfunktion till $L_0$ med egenvärdet $\mu$. En lämplig kopia av $f$ i $L^2(I)$, nämligen $h$, är således en egenfunktion till $L_0$ med egenvärdet $\mu$. Detta är den exakta innebörden av formleringen i sats 2.2, b) som därmed är fullständigt bevisad. $\square$

**Sats 7:** *Antag $L_0$ är symmetrisk och bijektiv. Låt vidare $\{\mu_n\}_1^\infty$ beteckna $L_0$:s egenvärden räknade med multiplicitet och antag $\{e_n\}_1^\infty$ är en motsvarande sekvens av ortonormerade egenfunktioner. Då är $\{e_n\}_1^\infty$ en fullständig ON-sekvens i $L^2(I)$ och lösningen till ekvationen*

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}$$

*där $f \in C(I)$, ges av*

$$u = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n}(f, e_n)e_n \quad (i\ L^2(I)).$$

**Bevis:** Operatorn $\tilde{G}$ är kompakt ([1] exempel 4.8.4) och Hilbert-Schmidts sats ([1] sats 4.10.1) och sats 6a) visar att $\{e_n\}_1^\infty$ är en fullständig ON-sekvens i $L^2(I)$. Av

$$f = \sum_1^\infty (f, e_n)e_n$$

i $L^2(I)$ fås nu av sats 6b) att

$$u = Gf = \tilde{G}f = \sum_1^\infty (f, e_n)\tilde{G}e_n = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n}(f, e_n)e_n$$

i $L^2(I)$. $\square$

**Exempel 2:** Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0,\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exempel 1 visar att motsvarande operator $L_0$ är symmetrisk och bijektiv. $L_0$:s egenfunktioner erhålls som de icke-triviala lösningarna till ekvationen

$$\begin{cases} -e''(x) = \mu e(x) \\ e(0) = e(1) = 0,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

och en enkel räkning visar att $e(x) = A\sin n\pi x$, där $A \neq 0$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Funktionsföljden $\{\sqrt{2}\sin n\pi x\}_1^\infty$ utgör därför en fullständig ON-sekvens i $L^2([0,1])$.

**Exempel 3:** Wirtingers olikhet innebär att

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \ge \pi^2 \int_0^1 |u(x)|^2 dx$$

för alla $u \in C^1([0,1])$ som uppfyller $u(0) = u(1) = 0$. För att visa denna låter vi först

$$u(x) = \sum_1^\infty a_n \sqrt{2}\sin n\pi x \quad (\text{i } L^2([0,1]))$$

där

$$a_n = \int_0^1 u(x)\sqrt{2}\sin n\pi x dx.$$

Vidare är

$$\int_0^1 u'(x)\sqrt{2}\cos n\pi x dx = \Big[u(x)\sqrt{2}\cos n\pi x\Big]_0^1 + n\pi \int_0^1 u(x)\sqrt{2}\sin n\pi x dx = n\pi a_n$$

och om vi utnyttjar att sekvensen $\{\sqrt{2}\cos n\pi x\}_1^\infty$ är ortonormerad så ger Bessels olikhet ([1] sats 3.7.2) nedskattningen

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \ge \sum_1^\infty n^2\pi^2 |a_n|^2$$

där högra sidan är större än eller lika med

$$\pi^2 \sum_1^\infty |a_n|^2 = \pi^2 \int_0^1 |u(x)|^2 dx.$$

Detta bevisar Wirtingers olikhet.

# References


[1] L.Debnath/P.Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications 2nd ed.*, Academic Press 1999

[2] P.Kumlin, *Lite om fixpunktssatser*, Matematik, CTH&GU 2001/2002

[3] P.Kumlin, *Grundläggande fakta om $L^p$–rum*, Matematik, CTH&GU 2001/2002