TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2001/2002
Peter Kumlin
Matematiska institutionen CTH& GU

Lite kompletteringar i Spektralanalys

En vanlig typ av problem i denna kurs är att lösa ekvationer

$$Af = g, \tag{1}$$

där A är en linjär operator, t.ex. en integraloperator eller en differentialoperator, och g är en känd funktion i något funktionsrum, som nästan alltid är ett Banachrum. De frågor man naturligen ställer sig är t.ex.

1. har $Af = g$ en lösning och är den i så fall unik?
2. om man stör högerledet g lite, dvs man väljer indata $\tilde{g}$, kommer lösningen $\tilde{f}$ till $A\tilde{f} = \tilde{g}$ att ligga nära f?
3. om operatorn $\tilde{A}$ väl approximerar operatorn A kommer då lösningen $\tilde{f}$ till $\tilde{A}\tilde{f} = g$ att väl approximera lösningen f till $Af = g$?

Dessa frågor kommer att preciseras och i viss mån besvaras nedan. En metod för att lösa detta problem är att beräkna den ”inversa operatorn” A^{-1} och därefter få fram lösningen genom att låta A^{-1} operera på g, dvs

$$f = A^{-1}g.$$

Vi har sett exempel på detta då A är en liten störning av identitetsoperatorn I på ett Banachrum X, nämligen $A = I + B$ med $\|B\| < 1$. Den inversa operatorn A^{-1} gavs av Neumannserien

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n B^n,$$

där B^0 ska tolkas som I. Mer exakt visade vi att om $B \in \mathcal{B}(X, X)$, där X är ett Banachrum, så gäller

- $C \equiv \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n B^n \in \mathcal{B}(X, X)$
- $(I + B)C = C(I + B) = I_X$
- $\|\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n B^n\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$

Vi lyckas ibland visa existens och entydighet av lösningar till ekvationer $Af = g$ i Banachrum X utan att för den skull kunna beräkna lösningen. Exempel på en sådan situation är då vi har *en familj* $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ *av begränsade linjära operatorer på ett Banachrum* X *som uppfyller följande villkor: Det finns en positiv konstant* C *sådan att*

1. $\|f\| \leq C\|A_t f\|$ *för alla* $t \in [0,1]$ *och alla* $f \in X$
2. $\|A_t f - A_s f\| \leq C|t-s|\,\|f\|$ *för alla* $t, s \in [0,1]$ *och alla* $f \in X$
3. A_0 *är en inverterbar operator på* X*, där inversen är en begränsad linjär operator på* X

Då gäller att även A_1 *är en inverterbar operator på* X*, där inversen är en begränsad linjär operator på* X*.* Detta är en allmän metod som brukar kallas **kontinuitetsmetoden**. Idén är här att A_1 är en störning av den "snälla" inverterbara operatorn A_0, där störningen är kontrollerad via 1 och 2 ovan. Beviset för påståendet i kontinuitetmetoden (väsentligen att A_1 är surjektiv) ges nedan och bygger på kontraktionssatsen!

Frågan är vad man ska mena med inversen av en operator. Om man bara ser A som en **avbildning** $X \to Y$ räcker det med att A är injektiv, dvs $A(x) = A(y)$ medför $x = y$, för att A^{-1} ska kunna definieras, då som en avbildning $\mathcal{R}(A) \to X$. Här är $\mathcal{R}(A) \subset Y$. Injektiviteten hos A medför att ekvationen (1) har högst en lösning, nämligen om $g \in \mathcal{R}(A)$ finns exakt en lösning f annars saknas lösning. Om A också är surjektiv, dvs $\mathcal{R}(A) = Y$, så att A är bijektiv, har ekvationen en entydigt bestämd lösning f för varje $g \in Y$. Om vi på detta sätt betraktar A i kategorin av avbildningar benämner vi A^{-1} den **inversa avbildningen** till A. Vi kan nu besvara frågan 1 vi ställde i inledningen. Om A har en invers avbildning och A är surjektiv så är ekvation (1) entydigt lösbar för varje högerled.

Om X och Y är normerade rum och A är **linjär** och **begränsad** skulle man med inversen till A kunna mena den linjära operator B, om den nu existerar, som är begränsad (linjäriteten är automatisk) och uppfyller

$$AB = I_{\mathcal{R}(A)}, \quad BA = I_X.$$

Om vi alltså betraktar A i kategorin av linjära begränsade avbildningar benämner vi A^{-1}, dvs operatorn B fyra rader upp, den **inversa operatorn** till A. Även här skulle man kunna kräva att A är surjektiv, dvs $\mathcal{R}(A) = Y$. Detta senare synsätt är naturligt om $X = Y$ och man betraktar samtliga operatorer som element i $\mathcal{B}(X, X)$ där X är ett Banachrum. Vi noterar att rummet $\mathcal{B}(X, X)$, som vi kortfattat betecknar $\mathcal{B}(X)$, inte bara är ett Banachrum utan också en Banachalgebra, dvs vi har en multiplikation i $\mathcal{B}(X)$ som ges av sammansättning av operatorerna

$$ST(x) = S(Tx)$$

och som uppfyller normolikheten

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Den inversa operatorn till A, om A är surjektiv, är då ett inverst element i Banachalgebran $\mathcal{B}(X)$.

Vi kommer i fortsättning att när vi talar om invers till A explicit ange om vi menar

1. **invers avbildning** och om vi dessutom kräver surjektivitet hos A eller ej, eller
2. **invers operator** (= invers linjär begränsad avbildning) och om vi här dessutom kräver surjektivitet hos A eller ej.

Låt oss först titta på följande exempel. Sätt

$$X = Y = \mathcal{P}([0,1])$$

och

$$Ap(x) = (1 - \frac{x}{2})p(x), \quad x \in [0,1].$$

Antag vidare att X och Y utrustats med L^2–normen. Vi noterar då att $(X, \|\cdot\|_2)$ och $(Y, \|\cdot\|_2)$ är normerade men ej fullständiga rum. Om vi kompletterar dessa normerade rum fås i bägge fallen Banachrummet $L^2([0,1])$. **Är A inverterbar**? Vi konstaterar först att A är en injektiv avbildning, dvs $Ap = Aq$ medför $p = q$, ty $Ap = Aq$ i Y betyder att $Ap(x) = Aq(x)$ för alla $x \in [0,1]$ vilket medför $p(x) = q(x)$ för alla $x \in [0,1]$, dvs $p = q$ i X. Men A är inte surjektiv eftersom $\mathcal{R}(A)$ består av restriktionerna till intervallet $[0,1]$ av alla polynom som har ett nollställe i $x = 2$. Visa detta! Vi har alltså visat att A har en invers avbildning definierad på alla polynom med nollställe i $x = 2$. Vidare är A en begränsad linjär avbildning från X in i Y. Operatornormen ges av

$$\|A\| = \sup_{\substack{p \in \mathcal{P}([0,1]) \\ \|p\|_2 = 1}} (\int_0^1 |(1 - \frac{x}{2})\, p(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Visa detta! Finns en invers operator till A? Vi ser att eftersom A ges som en multiplikatoravbildning ges också inversa avbildningen av en multiplikatoravbildning, i detta fall med multiplikatorn $\frac{2}{2-x}$. Men $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{P}([0,1])$ är då också en begränsad linjär avbildning med operatornormen

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\substack{p\in\mathcal{R}(A)\\ \|p\|_2=1}} \Big(\int_0^1 |(\frac{2}{2-x})\, p(x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Visa detta! Alltså är A^{-1} en invers operator till A men A är ej surjektiv. Om vi utvidgar A till hela $L^2([0,1])$, kalla utvidgningen $\tilde{A}$, vilket kan göras på ett entydigt sätt då polynomen $\mathcal{P}([0,1])$ är täta i $L^2([0,1])$ och A är en begränsad operator på $\mathcal{P}([0,1])$, ser vi att $\|I-\tilde{A}\| < 1$, där $\|\cdot\|$ betecknar operatornormen på $L^2([0,1])$, ty

$$\int_0^1 |\frac{x}{2} f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|^2\, dx,$$

dvs

$$\|(I-\tilde{A})f\| \leq \frac{1}{2}\|f\|.$$

Alltså ger Neumannserien $\Sigma_{n=0}^{\infty}(I-\tilde{A})^n$ ett uttryck för inversen till $\tilde{A}$, då ju $\tilde{A}$ kan skrivas som $\tilde{A} = I-(I-\tilde{A})$ på $L^2([0,1])$. Vi ser, föga förvånande, att

$$\tilde{A}^{-1}p(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}(I-\tilde{A})^n p(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n p(x) = \frac{2}{2-x}p(x).$$

Notera att $(\tilde{A}|_{\mathcal{P}([0,1])})^{-1} = A^{-1}$. Neumannserien applicerad på ett element i $\mathcal{R}(A)$ ger ett polynom, men för att säkerställa konvergensen av Neumannserien krävdes att vi betraktade serien i ett **Banachrum** och inte endast i ett normerat rum. Vi observerar att $\tilde{A}^{-1}$ är en begränsad operator på hela $L^2([0,1])$ med normen $\|\tilde{A}^{-1}\| = 2$ men att A^{-1} inte är en begränsad operator på hela $\mathcal{P}([0,1])$ och detta **trots att**

$$\|I-A\|_{X\to Y} \leq \|I-\tilde{A}\|_{L^2\to L^2} < 1.$$

Nedan följer några observationer relaterade till koncepten invers avbildning/invers operator.

- Låt oss först betrakta avbildningar mellan linjära rum. Vi har då följande resultat.
  Sats 1: *Antag att E är ett ändligtdimensionellt linjärt rum och att $A : E \to E$ är en linjär avbildning. Då är följande påståenden ekvivalenta.*

  1. *A är bijektiv*
  2. *A är injektiv, dvs $\mathcal{N}(A) = \{0\}$*
  3. *A är surjektiv, dvs $\mathcal{R}(A) = E$*

  Här kan man notera att påståendet i satsen inte behöver gälla om E är oändligtdimensionellt rum, vilket följande exempel visar.

  Sätt
  $$E = C([0,1])$$
  och
  $$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$
  Visa att A är injektiv men inte surjektiv!

- Låt oss nu fokusera på linjära avbildningar A mellan Banachrum X och Y. Vi har tidigare sett att

  - *A är kontinuerlig i $x_0 \in X$ implicerar att A är kontinuerlig i X*
  - *A är kontinuerlig om och endast om A är begränsad avbildning*

  Man kan, inte utan viss ansträngning, visa att det finns linjära avbildningar $A : X \to X$ som ej är begränsade, dvs att linjäriteten och avbildningasegenskapen $A(X) \subset X$ räcker ej för att A ska vara en begränsad operator. Detta är en relevant bakgrund då vi återvänder till **stabilitets**–frågan 2 vi ställde i inleningen, nämligen om $A : X \to Y$ är en bijektiv begränsad linjär operator så att A^{-1} existerar som invers avbildning $X \to Y$ gäller då att det finns en positiv konstant C så att
  $$\|f - \tilde{f}\| \leq C\|g - \tilde{g}\|,$$
  för alla $g, \tilde{g} \in Y$ där $Af = g$ och $A\tilde{f} = \tilde{g}$? Svaret ges av

  Sats 2 (Inversa avbildningssatsen): *Antag att $A : X \to Y$ är en bijektiv begränsad linjär avbildning från Banachrummet X till Banachrummet Y. Då exiserar A^{-1} som en begränsad linjär avbildning från Y till X.*

Svaret är alltså ja!

Beviset av denna sats bygger på Baires sats (se övningshäftet). Ofta brukar inversa avbildningssatsen ges som ett korollarium till den så kallade öppna avbildningssatsen, som bygger på Baires sats. Vi formulerar också denna sats men ger inga bevis.

Sats 3 (Öppna avbildningssatsen): *Antag att $A : X \to Y$ är en surjektiv begränsad linjär avbildning från Banachrummet X till Banachrummet Y. Då avbildar A öppna mängder i X på öppna mängder i Y.*

Notera att avbildningen $A : X \to Y$ är kontinuerlig om mängden $A^{-1}(U)$ är öppen i X för varje öppen mängd U i Y.

Tidigare visade vi med hjälp av Neumannserieteknik att ekvationen $Af = g$ är entydigt lösbar om $A = I - T$ där $\|T\| < 1$. Detta är tyvärr en kraftig inskränkning. Vi vill kunna behandla ekvationer ovan där T inte är en liten störning. Vi kommer därför, i likhet med fallet med ändligtdimensionella rum, att studera ekvationen

$$(\lambda I - T)f = g$$

där λ är en komplexvärd parameter. De nya begrepp vi kommer att stöta på är spektrum, resolvent och resolventmängd, och uppdelningar av spektrumet i disjunkta delar beroende egenskaper hos operatorn $\lambda I - T$.

Framställningen här utgör endast en liten komplettering av kursboken [1]. Vi hänvisar till böckerna [2], [3] and [4] för mer omfattande behandling av begreppen. Av dessa är de två första på ungefär samma nivå som kursboken.

Antag att X är ett komplext normerat rum och att $T : \mathcal{D}(T) \to X$ är en linjär avbildning med $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. Nästan alltid gäller $\mathcal{D}(T) = X$.

Definition 1: Resolventmängden *till T, betecknad med $\rho(T)$, består av alla komplexa tal $\lambda \in \mathbf{C}$ för vilka $(T - \lambda I)^{-1}$ existerar som en invers operator på hela rummet X. Avbildningen $\rho(T) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ kallas* **resolventen** *till T.*

Av definitionen följer att $\lambda \in \rho(T)$ medför att $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ och att $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$.

Definition 2: **Spektrumet** *för* T*, betecknat* $\sigma(T)$*, är mängden* $\mathbf{C} \setminus \rho(T)$*. Denna mängd är unionen av de tre parvis disjunkta delmängderna* $\sigma_p(T)$*,* $\sigma_c(T)$ *och* $\sigma_r(T)$*. Dessa kallas* **punktspektrumet***, det* **kontinuerliga spektrumet** *och* **residualspektrumet** *och definieras av egenskaperna*

- $\lambda \in \sigma_p(T)$ *om* $\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$*. Här kallas* λ *för* **egenvärde** *till* T *och ett* $v \in \mathcal{N}(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ *kallas en* **egenvektor** *svarande mot egenvärdet* λ*;*

- $\lambda \in \sigma_c(T)$ *om* $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ *och* $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ *är tät i* X *men* $(T - \lambda I)^{-1}$ *är inte en begränsad operator;*

- $\lambda \in \sigma_r(T)$ *om* $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ *men* $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ *är inte tät i* X*.*

Exempel:

1. Antag att $T : X \to X$ är en linjär avbildning på det ändligtdimensionella normerade rummet X. Då är $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ och spektrumet består av ändligt många element.

2. Betrakta den linjära avbildningen $T : l^2 \to l^2$ definierad av

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

   T är här en s.k. höger skiftoperator. Då gäller $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

Vi antar nu och genom hela texten att T *är en begränsad operator.*

Sats 4: *Resolventmängden är en öppen mängd.*

Bevisidé: Vi noterar att

- om $A : X \to X$ är en begränsad linjär operator med $\|A\| < 1$ så existerar $(I - A)^{-1}$ som en invers operator på hela X och

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots$$

  (Neumannseriesatsen)

- och om $\lambda_0 \in \rho(T)$ så gäller

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0)(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}).$$

En kombination av dessa observationer ger beviset för satsen.

Vi kan i detta sammanhang ge ett bevis för resultatet i kontinuitetsmetoden: Villkor 1 ger att alla A_t, $t \in [0,1]$, är injektiva. Om vi antar att A_t har en invers operator definierad på hela X kan vi skriva operatorn A_s som

$$A_s = A_t(I + A_t^{-1}(A_s - A_t)).$$

Alltså följer att A_s är inverterbar om $\|A_t^{-1}(A_s - A_t)\| < 1$ från Neumannseriesatsen. Men villkor 1 ger $\|A_t^{-1}\| \leq C$ och villkor 2 ger $\|A_s - A_t\| \leq C|s-t|$. Detta medför att

$$\|A_t^{-1}(A_s - A_t)\| \leq \|A_t^{-1}\| \, \|A_s - A_t\| < 1$$

om

$$|s-t| < \frac{1}{C^2}.$$

Välj nu en ändlig följd av t_n, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots < t_N = 1$, så att

$$\max_{n=1,2,\ldots,N-1} |t_{n+1} - t_n| < \frac{1}{C^2}.$$

Argumentet ovan ger att inverterbarhet av A_{t_n} implicerar inverterbarhet av $A_{t_{n+1}}$ och alltså inverterbarheten av A_0 medför inverterbarhet av A_1. (Inverterbarhet av en operator B betyder att B^{-1} existerar som invers operator och B är surjektiv.)

Sats 5: *Spektrumet $\sigma(T)$ ligger i cirkelskivan*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

i det komplexa talplanet.

Bevis: Övning

Sats 6: *Spektrumet $\sigma(T)$ är icke-tomt.*

Beviset utelämnas men bygger på Liouvilles sats, känd från komplexanalyskurser.

Definition 3: *Det* **approximativa punktspektrumet** *till T, betecknat med $\sigma_a(T)$, består av alla $\lambda \in \mathbf{C}$ för vilka det finns en följd av $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, med $\|x_n\| = 1$ och*

$$\lim_{n \to \infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Följande resultat sammanfattar de väsentliga egenskaperna för det approximativa punktspektrumet.

Sats 7: *Antag att T är en begränsad operator på X. Då gäller*

1. $\sigma_a(T)$ *är en sluten icke-tom delmängd av* $\sigma(T)$*;*
2. $\sigma_p(T) \bigcup \sigma_c(T) \subset \sigma_a(T)$*;*
3. *randen till* $\sigma(T)$ *ligger i mängden* $\sigma_a(T)$*;*

Vi antar framgent i texten att operatorn T är kompakt och att X är ett Banachrum. En operator T på X kallas kompakt om för varje begränsad följd $\{x_n\}$ i X det finns en konvergent delföljd av $\{Tx_n\}$ i X. Man kan baserat på Riesz lemma (se Exercises avsnittet om normerade rum) visa följande sats som brukar benämnas **Fredholms alternativsats**.

Sats 8 (Fredholms alternativsats): *Låt T vara en kompakt linjär operator på Banachrummet X och $\lambda \neq 0$. Då gäller antingen att*

1. *den homogena ekvationen*

$$Tx - \lambda x = 0$$

   har icke-triviala lösningar $x \in X$, eller att

2. *för varje $y \in X$ har ekvationen*

$$Tx - \lambda x = y$$

   en entydigt bestämd lösning $x \in X$.

I fall 2 gäller att operatorn $(T - \lambda I)^{-1}$ existerar som begränsad operator.

Exempel: Betrakta Volterraekvationen

$$f(x) = g(x) + \int_0^x K(x,y) f(y)\, dy \quad 0 \leq x \leq 1,$$

där K är en kontinuerlig funktion för $0 \leq x, y \leq 1$. Visa att det för varje $g \in C([0,1])$ finns exakt ett $f \in C([0,1])$ som löser ekvationen. Enligt teorin ovan (Fredholms alternativsats) räcker det att visa att $\mathcal{N}(T-I)=\{0\}$, där T är den kompakta (visa detta via Arzela-Ascolis sats) operatorn

$$Tf(x)=\int_0^x K(x,y)f(y)\,dy$$

på $C([0,1])$. Vi ska visa att

$$f(x)=\int_0^x K(x,y)f(y)\,dy \quad 0\le x\le 1$$

medför att $f=0$. Sätt $M=\max_{0\le x,y\le 1}|K(x,y)|$ och

$$\phi(x)=\int_0^x |f(y)|\,dy \quad 0\le x\le 1.$$

Då gäller att ϕ är deriverbar och

$$\phi^{'}(x)=|f(x)|\le M\phi(x) \quad 0\le x\le 1$$

varför $(\phi(x)e^{-Mx})'\le 0$ och alltså

$$\phi(x)\le\phi(0)e^{-Mx} \quad 0\le x\le 1.$$

Här är nu $\phi(0)=0$ och $\phi(x)\ge 0$ varför den önskade slutsatsen följer.

Man kan vidare visa följande resultat.

Sats 9 (Riesz-Schauder): *Antag att $T:X\to X$ är en kompakt linjär operator på ett Banachrum X. Då gäller*

1. *$\sigma_p(T)$ är uppräknelig, kan vara ändlig och även tom;*
2. *$\lambda=0$ är den enda hopningspunkten för mängden $\sigma_p(T)$;*
3. *λ är ett egenvärde om $\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}$;*
4. *X är oändligtdimensionellt rum medför att $0\in\sigma(T)$;*
5. *För $\lambda\ne 0$ är delrummen $\mathcal{R}((T-\lambda I)^r)$ slutna och delrummen $\mathcal{N}((T-\lambda I)^r)$ är ändligtdimensionella för $r=1,2,3,\ldots$;*
6. *För $\lambda\ne 0$ finns ett icke-negativt heltal r, som funktion av λ, så att*

$$X=\mathcal{N}((T-\lambda)^r)\bigoplus\mathcal{R}((T-\lambda)^r)$$

och

$$\mathcal{N}((T-\lambda I)^r) = \mathcal{N}((T-\lambda I)^{r+1}) = \mathcal{N}((T-\lambda I)^{r+2}) = \cdots$$

och

$$\mathcal{R}((T-\lambda I)^r) = \mathcal{R}((T-\lambda I)^{r+1}) = \mathcal{R}((T-\lambda I)^{r+2}) = \cdots.$$

Vidare om $r > 0$ så gäller

$$\mathcal{N}(I) \subset \mathcal{N}((T-\lambda I)^1) \subset \cdots \subset \mathcal{N}((T-\lambda I)^r)$$

och

$$\mathcal{R}(I) \supset \mathcal{R}((T-\lambda I)^1) \supset \cdots \supset \mathcal{R}((T-\lambda I)^r),$$

där $\subset$ och $\supset$ betecknar äkta delmängd.

7. *För $\lambda \neq 0$ gäller*[1]

$$\mathcal{R}(T-\lambda I) = \mathcal{N}(T^* - \lambda I)^{\perp}.$$

Det sista påståendet i satsen har mening för oss om X är ett Hilbertrum ("Riesz-delen" av satsen) men man kan även ge mening åt begreppen adjungerad operator i Banachrum och "ortogonalt komplement", som man i stället brukar benämna mängden av annihilatorer ("Schauder-delen" av satsen är generaliseringen till godtyckliga Banachrum). Här bör man observera att definitionen av adjunkt operator på Banachrum skiljer sig något från Hilbertsrumadjunkten men bara upp till en isometri. För den intresserade hänvisar vi till [2], [3] och [4].

Om vi utnyttjar sista delen av Riesz-Schauders sats kan vi precisera Fredholms alternativsats något.

Sats 10 (Fredholms alternativsats): *Låt T vara en kompakt linjär operator på Banachrummet X och $\lambda \neq 0$. Då gäller att $Tx - \lambda x = y$ har en lösning om och endast om*[2] *$y \in \mathcal{N}(T^* - \lambda I)^{\perp}$.*

[1] Här uppträder en skillnad i Hilbertrumsfallet, dvs X är ett Hilbertrum, beroende på vilken definition av adjungerad operator som används. Om vi använder vår vanliga Hilbertrumsvariant ska sambandet i stället vara vara

$$\mathcal{R}(T-\lambda I) = \mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp}.$$

[2] Om X är ett Hilbertrum och den vanliga definitionen av Hilbertrumsadjunkt används så ska sambandet vara $y \in \mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp}$.

Låt nu $X = H$ vara ett Hilbertrum och T en kompakt linjär operator på H. Om T dessutom är självadjungerad så får vi den motsvarighet till Fredholms alternativsats som ges i kursboken [1] Sats 5.2.6, vilket med Hilbertrumsnotationen kan skrivas som

$$\mathcal{R}(T - I) = \mathcal{N}(T - I)^{\perp}.$$

Vidare kommer i fallet med självadjungerade kompakta operatorer på Hilbertrum heltalet r i Sats 9 att vara lika med 1. I samband med $n \times n$–matriser och deras egenvärden svarar detta mot att den algebraiska multipliciteten och den geometriska multipliciteten är lika för egenvärden till hermitska matriser.

Låt oss bara som hastigast indikera sammanhangen i Banachrumsfallet.

För godtyckligt Banachrum X sätter vi $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$, betraktat som ett Banachrum med normen given av operatornormen $\|\cdot\|_{X\to\mathbf{C}}$. Givet en begränsad linjär operator mellan Banachrummen X och Y, dvs $T : X \to Y$, definierar vi avbildningen $T^* : Y^* \to X^*$ via relationen

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx) \quad \text{alla} \quad y \in Y^*,\, x \in X.$$

Man kan lätt visa att T^* är en begränsad linjär avbildning med $\|T^*\|_{Y^*\to X^*} = \|T\|_{Y\to X}$. För mängder $A \subset X$ och $B \subset X^*$ i Banachrum X definierar vi

$$A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \quad \text{alla} \quad x \in A\}$$

och

$$B^{\perp} = \{x \in X : x^*(x) = 0 \quad \text{alla} \quad x^* \in A\}.$$

Här blir $A^{\perp}$ och $B^{\perp}$ slutna delrum i X^* respektive X. Du ser här en skillnad i definitionen jämfört med ortogonalt komplement för mängd A i Hilbertrum. Man kan visa följande resultat (du känner nog igen det i fallet $X = \mathbf{C}^n$,$Y = \mathbf{C}^m$ och T given av en $m \times n$–matris).

Sats 11: *Antag att X och Y är Banachrum och $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Då gäller*

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp}.$$

Om $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$ så gäller

$$\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^{\perp}$$

och $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{R}(T^*)$.

För T i sats 11 gäller att om T är kompakt så är T^* också kompakt (omvändningen gäller också). T är kompakt medför också att $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ är sluten (jämför med Exercises avsnittet om linjära operatorer på Hilbertrum). Sats 11 ger då att

$$\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(T^* - \lambda I)^{\perp}$$

och

$$\mathcal{R}(T^* - \lambda I) = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\perp}.$$

Slutligen refererar till kursboken [1] för spektralteorin för självadjungerade operatorer.

References

[1] L.Debnath/P.Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications 2nd ed.*, Academic Press 1999

[2] A.Friedman, *Foundations of modern analysis*, Holt Rinehart and Winston, 1970

[3] E.Kreyszig, *Introduction to functional analysis with applications*, Wiley 1989

[4] W.Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991