TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2002/2003
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Gamla tentor från

1999 – dags dato

lösningsförslag levereras separat

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Erik Broman 0740-459022

Datum: 2002–08–21
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: VV22

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)^2 f(y)\,dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Calculate

(a) A^*
(b) $\|A\|$.

(1+3p)

2. Consider the differential equation

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Formulate the boundary value problem as a fixed point problem $u = Tu$, where T is an integral operator.
(b) Set $B = \{u \in C([0,1]) : \|u\|_\infty \leq 1\}$. Show that T maps B into itself provided $0 < \lambda < \lambda_0$ for λ_0 sufficiently small. Give a numerical value on λ_0.
(c) Show that the differential equation is uniquely solvable in B with λ chosen as in (b).

(2+1+1p)

3. Let T be a positive, self-adjoint, compact operator on a Hilbert space H. Show that

$$\langle Tx, x\rangle^n \leq \langle T^n x, x\rangle \cdot \langle x, x\rangle^{2(n-1)},$$

for all positive integers n and all $x \in H$.

(4p)

4. State and prove Lax-Milgram's theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let A be a subset of a Hilbert space H. Show that $(A^{\perp})^{\perp}$ is the smallest closed subspace of H that contains A.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 0739603800 (eller 035 52077)
(*Om telefonen ovan ej fungerar:* Jana Madjarova 031 7757763)

Datum: 2002–06–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Calculate

(a) A^*A

(b) $\|A\|$.

(2+2p)

2. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

3. Let $T : X \to X$ be a mapping (not necessary linear) on a normed space X. Moreover assume that there are real constants C, α, where $\alpha > 1$, such that

$$\|T(x) - T(y)\| \le C\|x-y\|^\alpha, \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that there exists a $z \in X$ such that $T(x) = z$ for all $x \in X$.

(4p)

4. State and prove Hilbert-Schmidt's theorem.

(5p)

5. Let A be a bounded operator on a Hilbert space H. Define the adjoint operator A^* (also prove that it exists) and show that A^* is a bounded operator on H with $\|A\| = \|A^*\|$.

(4p)

6. Let T be a self-adjoint operator on a Hilbert space H. Assume that T^n is compact for some integer $n \geq 2$. Prove that T is compact.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Peter Kumlin 772 3532 (alternativt 0739603800)

Datum: 2002–01–26
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Låt H vara ett oändligtdimensionellt Hilbertrum och $T : H \to \mathbf{C}$ en begränsad linjär funktional $\neq 0$. Beräkna dimensionen för det linjära delrummet $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ av H. Ge också ett exempel på ett Hilbertrum H och en funktional T som ovan.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att $u(0) = u(1) = 0$ och

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt T vara en självadjungerad, positiv, kompakt operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| \leq 1$. Ge en uppskattning[1] av

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

4. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

5. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Banachrum X. Definiera $\sigma(T)$. Låt $\sigma_a(T)$ beteckna det approximativa spektrumet för T, dvs mängden av alla komplexa tal λ för vilka det finns en följder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i X med $\|x_n\| = 1$ så att

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Visa att $\sigma_a(T)$ är en delmängd av $\sigma(T)$.

[1]En uppskattning bättre än den triviala

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\| \leq 3\|T\|^4 + 20\|T\|^3 + \|T\|^2 \leq 24.$$

(4p)

6. Givet en tät delmängd S i ett Banachrum X. Låt vidare $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av linjära operatorer på X. Antag att

   (a) $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in S$ och att

   (b) det finns ett $C > 0$ så att
   $$\|T_n x\| \leq C\|x\|$$
   för alla n och alla $x \in X$.

   Visa att $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in X$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Robert Berman 0740-459022

Datum: 2001–08–29
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal:

---

1. Låt l^2 beteckna Banachrummet av alla sekvenser $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ med elementvis addition och multiplikation med skalär och med den vanliga normen $\|\mathbf{x}\|^2 = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$. För varje $\mathbf{x} \in l^2$ definiera

$$(T\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_{n+1} + 2x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k, k \in \mathbf{Z} \\ 2x_{n+1} + x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k+1, k \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Avgör om T är

(a) en begränsad linjär operator på l^2

(b) självadjungerad

(c) en inverterbar operator[2].

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0,1]$ sådan att

$$u(0) - 2u(1) = u'(0) - 2u'(1) = 0$$

och

$$4u''(x) - |u(x) + x| = 0, \quad x \in [0,1].$$

(4p)

3. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\dim \mathcal{R}(T) = 1$. Visa att för alla $y \in \mathcal{R}(T)$, $y \neq 0$, finns entydigt bestämda $x \in H$ så att

$$Tz = \langle z, x \rangle y, \quad z \in H.$$

Visa också att

$$\|T\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Använd t.ex. detta faktum för att beräkna operatornormen för avbildningen

$$Tf(t) = \int_0^1 e^{t-s} f(s)\, ds, \qquad f \in L^2[0,1].$$

---

[2]dvs $T^{-1} \in \mathcal{B}(l^2)$.

(4p)

4. Formulera[3] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Givet ett slutet äkta delrum F i ett normerat rum E. Visa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $x \in E$ sådant att $\|x\| = 1$ och $\|x - y\| > 1 - \epsilon$ för alla $y \in F$. Använd t.ex. detta för att visa varje normerat rum X där den slutna enhetsbollen $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ i X är kompakt är ändligtdimensionellt.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[3] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2001–05–30
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: VV

---

1. Sätt
$$Au(x) = \int_0^\pi e^{x+y}\cos(x+y)u(y)\,dy, \qquad x \in [0,\pi].$$
Beräkna operatornormen för A och avgör om A är en kompakt operator då A betraktas som en operator på
   (a) Banachrummet $C[0,\pi]$,
   (b) Banachrummet $L^2[0,\pi]$.

(2p+2p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0,1]$ sådan att $u(0) = u'(0) = 0$ och
$$u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, \quad x \in [0,1].$$

(4p)

3. Låt E vara ett normerat rum. Visa att det inte kan finnas avbildningar $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att
$$ST - TS = I,$$
där I betecknar identitetsoperatorn på E.

(4p)

4. Formulera[4] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa[5] spektralsatsen för självadjungerade kompakta operatorer på Hilbertrum.

(5p)

6. Låt T vara en normal linjär avbildning på ett Hilbertrum H, dvs T är en begränsad operator sådan att T kommuterar med sin adjunkt T^*, eller i klartext

$$TT^* = T^*T.$$

Visa att

(a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ för alla $x \in H$;

(b) λ är ett egenvärde med egenvektor x till T om och endast om $\overline{\lambda}$ egenvärde med egenvektor x till T^*.

(1p+3p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[4] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.
[5] Beviset ska inkludera bevis av den sats som kallas för Hilbert-Schmidts sats i kursboken.

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: ....

Datum: 2001–02–17
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Maskinhuset

---

1. För $u \in C[0,1]$ sätt

$$(Au)(x) = \int_0^{1-x} |x-y| u(y)\, dy, \quad x \in [0,1].$$

Visa att A är en begränsad linjär operator på Banachrummet $C[0,1]$ samt beräkna operatornormen $\|A\|$.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ sådan att $u'(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0$ och

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{2} \sin u(x^2), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Beräkna här först Greenfunktionen och formulera sedan om differentialekvationen som en integralekvation. Bestäm slutligen funktionen $u(x)$.

(4p)

3. Antag att H är ett Hilbertrum. Använd spektralsatsen för att finna en H-värd lösning $u(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \\ \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases}$$

där A är en kompakt, självadjungerad, positivt definit operator på H. Visa att

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad t \geq 0.$$

(4p)

4. (a) Låt A vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

   (b) Definiera vad som menas med att en följd i ett Hilbertrum konvergerar svagt. Ge exempel på en följd som konvergerar svagt men ej starkt.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Niklas Lindholm, 0740-350646

Datum: 2000–08–22
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: VV

---

1. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd, dvs $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. Visa genom att använda Banachs kontraktionssats[6] att det finns en begränsad följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ som löser

$$x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

där $x_0 = 1$.

(4p)

2. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av

$$(Af)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av

$$(Bf)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

Funktionerna är komplexvärda.

(4p)

3. Låt T vara definierad för $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ enligt

$$(T\mathbf{x})_n = n x_n, \;\; n = 1, 2, \dots$$

Visa att $D(T) = \{\mathbf{x} \in l^2 : T\mathbf{x} \in l^2\}$ är en tät delmängd i l^2 och att T är en sluten operator[7] i l^2, dvs att $\mathbf{x}_n \in l^2$ för $n = 1, 2, \dots$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$ i l^2, $T\mathbf{x}_n \to \mathbf{z}$ i l^2 medför att $\mathbf{y} \in D(T)$ och $T\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

---

[6] Betrakta avbildningen

$$x_n \mapsto \frac{1}{4}(a_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \;\; n = 1, 2 \dots .$$

[7] Utnyttja t.ex. att T är en självadjungerad operator.

(4p)

4. Låt $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ vara kontinuerliga funktioner på intervallet $I = [0, 1]$, där n är ett heltal ≥ 2. Låt vidare α_{ij}, β_{ij} för $i = 0, \ldots, n-1$ och $j = 1, \ldots, n$ vara komplexa tal och sätt

$$R_j u = \Sigma_{i=0}^{n-1}(\alpha_{ij} u^{(i)}(0) + \beta_{ij} u^{(i)}(1)), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Vidare sätt

$$Lu = u^{(n)} + c_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + c_1 u^{(1)} + c_0 u$$

och

$$Ru = (R_1 u, \ldots, R_n u).$$

Ge tillräckliga villkor för att det för varje $f \in C(I)$ ska finnas en unik lösning $u \in C^n(I)$ till problemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}.$$

Redogör dessutom för hur man beräknar u, dvs beskriv hur man bestämmer Greenfunktionen till randvärdesproblemet.

(4p)

5. Formulera och bevisa ”Orthogonal decomposition theorem”.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH

Extra Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon:

Datum: 2000–06–06
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal:

---

1. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av

$$(Af)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av

$$(Bf)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda |u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning om $|\lambda|$ är tillräckligt litet.

(4p)

3. Antag att $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ är en linjär avbildning sådan att $Tf \geq 0$ om $f \geq 0$. Visa att T är en begränsad operator.

(4p)

4. Definiera vad som menas med (ortogonal) projektionsoperator, att en operator är idempotent, samt visa följande påstående:

Antag att A är en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att A är en (ortogonal) projektionsoperator på H om och endast om A är idempotent och självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att
$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R}$$
för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 772 3532

Datum: 2000–05–30
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Gamla M-huset

---

1. Betrakta integraloperatorn

$$Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\, dy, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Visa att A definierar en begränsad linjär operator på de två Banachrummen (reella funktioner)

(a) $C[0, 2\pi]$
(b) $L^2[0, 2\pi]$.

Beräkna operatornormen $\|A\|$ i något av fallen.

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning för $|\lambda|$ litet.

(4p)

3. Betrakta avbildningen

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \dots, \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots x_n), \dots).$$

Visa att detta är en begränsad linjär operator på l^2 som ej är surjektiv.

(4p)

4. Låt $A : H \to H$ vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Definiera A^* och visa att den är en väldefinierad begränsad linjär operator på H och att $\|A^*\| = \|A\|$. Visa slutligen att om $A_n \to A$ i $\mathcal{B}(H, H)$ då $n \to \infty$ och om alla A_n är självadjungerade så är också A självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

6. Låt T vara en linjär begränsad operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att det finns ett $x_0 \in H$ så att $Tx_0 = x_0$. Visa att då gäller att $T^*x_0 = x_0$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2000–01–15
Skrivtid: 14.15 – 18.15
Lokal: VV11

---

1. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \sin u(x) = \cos x, & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

(4p)

2. Låt A vara en begränsad, självadjungerad kompakt operator på ett Hilbertrum H med $\|A\| \le 1$. Visa att

$$\|A^4 - A^2\| \le \frac{1}{2}.$$

(4p)

3. Låt K_i beteckna den linjära avbildning på $L^2(0,\infty)$ som ges av kärnorna $k_i : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$, $i = 1,2,3$, där

$$k_1(x,y) = \chi_{\{x>0,y>0\}}(x,y)\,\frac{1}{x+y},$$

$$k_2(x,y) = \chi_{\{x>y>0\}}(x,y)\,\frac{1}{x+y},$$

och

$$k_3(x,y) = \chi_{\{x>y>0\}}(x,y)\,\frac{1}{x}.$$

Här betecknar $\chi_A(x,y)$ den funktion som är 1 för $(x,y) \in A$ och 0 för $(x,y) \notin A$ och

$$K_i f(x) = \int_0^\infty k_i(x,y) f(y)\,dy.$$

Visa att

(a) $K_1 = K_2 + K_2^*$

(b) $\|K_2\| \leq \|K_3\|$

(c) $\|K_1\| \leq 4$.

(1+1+2p)

4. (a) Visa att en linjär operator på ett normerat rum är kontinuerlig om och endast om den är begränsad.

   (b) Låt x, x_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhöra ett Hilbertrum H. Visa att $x_n \rightharpoonup x$ i H och $\|x_n\| \to \|x\|$ i $\mathbf{R}$ medför $x_n \to x$ i H.

(2+2p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt A, B vara begränsade linjära operatorer på ett Hilbertrum. Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden

   (a) Om A eller B är kompakt så är AB kompakt.

   (b) Om AB är kompakt så är A eller B kompakt.

(2+2p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 1999–08–21
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal: MG

---

1. Bestäm
$$\inf_{a,b\in\mathbf{R}} \int_0^1 |x + ax^2 + b|^2\, dx.$$
(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen
$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$
har en entydigt bestämd lösning om $|\lambda| < e(e-1)$.
(4p)

3. Låt K beteckna den sluten cirkelskivan $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1\}$ och låt ∂K beteckna cirkelskivans rand. Antag att $f : K \to \mathbf{R}^2$ är en kontinuerlig funktion sådan att $f(x) = x$ för $x \in \partial K$ och att $g : K \to K$ är en kontinuerlig funktion. Visa att det finns en punkt $p \in K$ så att $f(p) = g(p)$.
(4p)

4. (a) Visa att en linjär operator på ett normerat rum är kontinuerlig om och endast om den är begränsad.
   (b) Låt x, x_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhöra ett Hilbertrum H. Visa att $x_n \rightharpoonup x$ i H och $\|x_n\| \to \|x\|$ i $\mathbf{R}$ medför $x_n \to x$ i H.
(2+2p)

5. Formulera och bevisa Lions-Stampacchias sats.
(5p)

6. Låt A vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum. Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden

   (a) Om det finns ett positivt heltal n så att $A^n = 0$ så är A kompakt.

   (b) Om det finns ett positivt heltal n så att $A^n = I$ så är A ej kompakt.

(2+2p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon:

Datum: 1999–05–25

Skrivtid: fm (5 timmar)

Lokal: MN

---

1. Visa att l^1, betraktad som en mängd, är en delmängd av l^2, betraktad som en mängd. Visa att l^1, betraktad som en delmängd av l^2, är ett delrum av Banachrummet l^2. Är detta delrum ett slutet delrum?

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda |u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning om $|\lambda| < e(e-1)$.

(4p)

3. Antag att $A : H \to H$ är en kompakt självadjungerad operator på ett Hilbertrum H. Visa att det finns positiva[8] kompakta självadjungerade operatorer på H sådana att

$$A = B - C.$$

(4p)

4. (a) Antag att $A : H \to H$ är en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att A^* är en begränsad linjär operator på H.

   (b) Antag att $A_n \to A$ i $\mathcal{B}(H,H)$, där H är ett Hilbertrum. Visa att A är självadjungerad om alla A_n är självadjungerade.

(4p)

5. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

[8] $\langle Bx, x\rangle \geq 0$ och $\langle Cx, x\rangle \geq 0$ för alla $x \in H$.

(5p)

6. Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i ett Hilbertrum H. Antag att $x_n \rightharpoonup 0$ i H då $n \to \infty$. Visa att det finns en delföljd $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ av $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådan att

$$\frac{1}{m}\Sigma_{k=1}^{m} x_{n_k} \to 0 \quad \text{i} \quad H$$

då $m \to \infty$[9].

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[9]Detta visar att man från varje svagt konvergent följd $x_n \rightharpoonup x$ kan hitta en följd $\{y_n\}$ sådan att $y_n \to x$ och där varje element y_n är en konvexkombination av elementen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.