TMA 401/MAN 670 Functional Analysis 2002/2003
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Gamla tentor från

1999 – dags dato

lösningsförslag

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-08-21

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatorn A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \overline{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$A^*Af(x) = \int_0^1 (y-x)Af(y)\,dy = \int_0^1 (y-x)(\int_0^1 (y-z)f(z)\,dz)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (y-x)(y-z)\,dy)f(z)\,dz = \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz)f(z)\,dz,$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatorn ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax+b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax+b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax+b), \quad \text{alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x - t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t - 1, \; 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = -\displaystyle\int_0^1 g(x,t)(2 + \frac{1}{1+u^2(x)})\,dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \int_0^1 |g(x,t)||\frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)}|\,dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt\|u-v\|_\infty.$$

Vi noterar att $|\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}| \leq \frac{1}{2}|\frac{2a}{1+a^2}| + \frac{1}{2}|\frac{2b}{1+b^2}| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x,t)|\,dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2}(1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u-v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0,1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle = \Sigma_i \lambda_i |\langle x, e_i\rangle|^2$$

där $\lambda_i \geq 0$, e_i, $i = 1, 2, \ldots$, betecknar egenvärdena respektive motsvarande normerade egenvektorer till operatorn T. Låt n vara ett fixerat positivt heltal > 1 (om $n = 1$ är påståendet trivialt sant). Hölders olikhet med exponenterna n och n^*, där $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^*}$, tillsammans med Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle \leq (\Sigma_i \lambda_i^n |\langle x, e_i\rangle|^{\frac{2}{n}n})^{1/n} \cdot (\Sigma_i |\langle x, e_i\rangle|^{(2-\frac{2}{n})n^*})^{1/n^*} = \langle T^n x, x\rangle^{1/n} \cdot \|x\|^{2(n-1)/n}.$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-06-01

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x - y$. Den adjungerade operatorn A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \overline{y-x} = y - x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$A^*Af(x) = \int_0^1 (y-x)Af(y)\,dy = \int_0^1 (y-x)(\int_0^1 (y-z)f(z)\,dz)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (y-x)(y-z)\,dy)f(z)\,dz = \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz)f(z)\,dz,$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatorn ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax+b), \text{ alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x - t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t - 1, \; 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \le 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = -\int_0^1 g(x,t)(2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)})\,dt, \quad 0 \le x \le 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \int_0^1 |g(x,t)||\frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)}|\,dt \le$$
$$\le \int_0^1 |g(x,t)||\frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt \le$$
$$\le \int_0^1 |g(x,t)||\frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt\|u-v\|_\infty.$$

Vi noterar att $|\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}| \le \frac{1}{2}|\frac{2a}{1+a^2}| + \frac{1}{2}|\frac{2b}{1+b^2}| \le 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x,t)|\,dt \le \max_{0\le x\le 1} \frac{x}{2}(1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \le \frac{1}{8}\|u-v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0,1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Låt T vara en avbildning på ett normerat rum X som uppfyller följande villkor: Det finns ett reellt tal C och ett reellt tal $\alpha > 1$ sådana att

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha, \quad \text{alla } x, y \in X.$$

Vi ska visa att $T(x) = T(\mathbb{O})$ för alla $x \in X$.

Fixera ett godtyckligt $x \in X$. Sätt $\delta = \|T(x) - T(\mathbb{O})\|$. Fixera ett positivt heltal n och sätt $x_k = \frac{k}{n}x \in X$ för $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Då gäller

$$\delta = \|T(x_n) - T(x_{n-1}) + T(x_{n-1}) - \ldots - T(x_0)\| \leq$$

$$\leq \Sigma_{k=0}^{n-1}\|T(x_{k+1}) - T(x_k)\| \leq C\Sigma_{k=0}^{n-1}\|x_{k+1} - x_k\|^\alpha =$$

$$= C\|x\|^\alpha \cdot n^{\alpha-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Detta medför att $\delta = 0$ och påstendet i uppgiften är visat.

Anm: Om $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller

$$|T(x) - T(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \text{alla } x, y \in \mathbf{R}$$

så gäller att

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \left|\frac{T(x+h) - T(x)}{h} - 0\right| = 0, \quad \text{alla } x \in \mathbf{R}$$

dvs. T är en deriverbar funktion med derivatan $= 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ och alltså är T en konstant funktion.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en självadjungerad operator på ett Hilbertrum H för vilken T^n är kompakt för något heltal $n \geq 2$. Vi ska visa att T är kompakt.

Vi noterar att T självadjungerad innebär (per definition) att T är en begränsad operator. T är kompakt om vi kan visa att T^k kompakt implicerar att T^{k-1} är kompakt för godtyckligt heltal $k \geq 2$.

Antag nu att T^k är kompakt för fixt $k \geq 2$. Låt $(x_n)_{n=1}^\infty$ vara en begränsad följd i H, dvs det finns ett reellt tal M sådant att $\|x_n\| \leq M$ för alla n. Då T^k är kompakt finns det en delföljd (x_{p_n}) av (x_n) för vilken $(T^k x_{p_n})$ konvergerar i H. Då konvergerar också $(T^{k-1}x_{p_n})$ i H eftersom

$$\begin{aligned}\|T^{k-1}x_{p_n} - T^{k-1}x_{p_m}\|^2 = \langle T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle = \\ = \langle T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^{k}(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle \leq \\ \leq \|T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m})\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\| \leq \\ \leq \|T^{k-2}\| \cdot \|x_{p_n} - x_{p_m}\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k p_{p_m}\| \leq \\ \leq \underbrace{2\|T\|^{k-2}M}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m})\|}_{\to 0,\ n,m\to\infty}\end{aligned}$$

och varje Cauchyföljd i ett Hilbertrum konvergerar. Detta medför att T^{k-1} är kompakt och påståendet i uppgiften är visat.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2001-05-30

1. A är integraloperator med kärnan $a(x,y) = e^{x+y}\cos(x+y)$, där $a \in C([0,\pi]\times[0,\pi])$ och $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$.

   a) Banachrummet $C[0,\pi]$: För $u \in C[0,\pi]$ gäller

   $$|Au(x)| \le \int_0^\pi e^{x+y}|\cos(x+y)|dy\|u\|_\infty \equiv I(x)\|u\|_\infty, x \in [0,\pi],$$

   där $I \in C[0,\pi]$. Alltså $\|A\| \le \max_{x\in[0,\pi]} I(x) = I(x_0)$ för något $x_0 \in [0,\pi]$. Vidare gäller $I(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n(x)$ där

   $$u_n(x) = \begin{cases} +1 \text{ då } \min(|x+x_0-\frac{\pi}{2}|, |x+x_0-\frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \ \& \ \cos(x+x_0) > 0 \\ -1 \text{ då } \min(|x+x_0-\frac{\pi}{2}|, |x+x_0-\frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \ \& \ \cos(x+x_0) < 0 \\ \text{till beloppet} \le 1 \text{ och kontinuerlig för övrigt} \end{cases}$$

   Här approximerar u_n-funktionerna funktion $\operatorname{sign}(\cos(x_0+\cdot))$. (Liten) kalkyl ger $I(x_0) = I(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$.

   b) Banachrummet $L^2[0,\pi]$: Då L^2 är Hilbertrum och A är självadjungerad gäller

   $$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ genvärde till } A\}.$$

   Då $Au(x) = \int_0^\pi e^x \cdot e^y(\cos x\cos y - \sin x \sin y)u(y)dy = ae^x\cos x + be^x \sin x$ fås egenvärdena λ som lösningar till $A(ae^x\cos x + be^x\sin x) = \lambda(ae^x\cos x + be^x \sin x)$ för $|a|+|b| > 0$, dvs

   $$\begin{cases} \Big(\frac{3}{8} - \frac{\lambda}{e^{2\pi}-1}\Big)a - \frac{1}{8}b = 0 \\ \frac{1}{8}a - \Big(\frac{3}{8} + \frac{\lambda}{e^{2\pi}-1}\Big)b = 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger } \lambda = \pm(e^{2\pi}-1)\frac{5}{32}.$$

   Detta ger $\|A\| = \dfrac{5}{32}(e^{2\pi}-1)$.

   Svar:

   $$\|A\|_{C[0,\pi]\to C[0,\pi]} = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$$

   $$\|A\|_{L^2[0,\pi]\to L^2[0,\pi]} = \frac{5}{2}(2^{2\pi}-1)$$

   Dessutom är A kompakt operator betraktad som operator $C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ och $L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$. Detta följer av

   $$|Au(x_1) - Au(x_2)|^2 \le \int_0^\pi |a(x_1,y) - a(x_2,y)|^2 dy\|u\|^2_{L^2[0,\pi]},$$

   Arzela-Ascoli sats och inbäddningen $\|u\|_{L^2[0,\pi]} \le \sqrt{\pi}\|u\|_{C[0,\pi]}$.

2. Beräkna greenfunktionen $g(x,y)$ till differentialoperatorn $Lu = u'' - u$ med randvillkoren $R_1 u = u(0) = 0, R_2 u - u(0) = 0. u_1(x) = e^x, u_2(x) = e^{-x}$ är en bas för $\mathcal{N}(L)$ och ansättningen $\theta(x,t) = a_1(t)u_1(x) + a_2(t)u_2(x)$, där $e(t,t) = 0, e'_x(t,t) = 1$, ger fundamentallösningen $e(x,t) = \sinh(x-t)$. Vi noterar att $g(x,t) = e(x,t)\theta(x-t)$
satisfierar randvillkoren för $t \in (0,1)$. Alltså ges lösningen till $Lu = f, Ru = (R_1 u, R_2 u) = 0$ av

$$u(x) = \int_0^1 \sinh(x-t)\theta(x-t)f(t)dt = \int_0^x \sinh(x-t)f(t)dt.$$

Definiera nu

$$T : C[0,1] \to C[0,1]$$

enligt $Tu(x) = -\int_0^x \sinh(x-t)\frac{1}{2}(1+(u(t^2)))dt$, som är en kontinuerlig funktion då integranden $\in C([0,1] \times [0,1])$. T är en kontraktion då

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\frac{1}{2}\int_0^x \sinh(x-t)((u(t^2)) - (v(t^2)))dt| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^x \sinh(x-t)dt\|u-v\|_\infty = \frac{1}{2}(\cosh x - 1)\|u-v\|_\infty \leq$$
$$\leq \frac{(e-1)^2}{2e}\|u-v\|_\infty \text{ eftersom } \frac{(e-1)^2}{2e} < 1.$$

Banachs fixpunktssats ger existens av entydigt bestämd fixpunkt, vilken också är den entydigt bestämd lösningen till differentialekvationsproblemet.

3. Antag att det finns $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att $ST - TS = I$. Detta medför att $TST - T^2S = T = ST^2 - TST$ vilket ger $2T = ST^2 - T^2S$. P.s.s. följer $nT^{n-1} = ST^n - T^nS$ för alla positiva heltal n. Vidare fås då $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ för alla $A, B \in \mathcal{B}(E)$ att

$$n\|T^{n-1}\| \leq \|S\|\,\|T\|\,\|T^{n-1}\| + \|T^{n-1}\|\,\|T\|\,\|S\| \quad n = 2, 3, \ldots$$

Då $\|S\|, \|T\| < \infty$ följer att $\|T^{n-1}\| = 0$ för n tillräckligt stort, dvs $T^{n_0-1} = \mathbf{0} \in \mathcal{B}(E)$ för något positivt heltal.

Men $nT^{n-1} = ST^m - T^nS$ tillämpad på $n = n_0, n_0 - 1, \ldots, 2$ ger $T = \mathbf{0}$. Detta motsäger att $ST - TS = I$. Alltså saknas $S, T \in \mathcal{B}(e)$ med egenskapen ovan.

4. & 5. Kursboken...

6. Antag $T \in \mathcal{B}(H)$ normal och $x \in H$. Då gäller

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^T x, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

och $\|Tx\| = \|T^*x\|$ följer. a) visad.

Av a) följer att $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ för alla normala operator $T \in \mathcal{B}(H)$. Fixera att $\lambda \in \mathbb{C}$. Då är $\lambda I - T$ normal om T är normal ty $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda}I - T^*$ och

$$(\lambda I - T)(\bar{\lambda}I - T^*) = |\lambda|^2 I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + TT^* = \{TT^* = T^*T\} = (\bar{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T).$$

Alltså gäller $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\bar{\lambda}I - T^*)$ dvs b) visad. Alternativt kan man bara "räkna på" från $\|T^*x - \bar{\lambda}x\|^2$.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2000-05-30

Uppgift 1

Givet $Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\, dy$, $0 \le x \le 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $C[0, 2\pi]$: Linjäriteten trivial (men bör visas). Begränsningen av A följer av

$$|Af(x)| = |\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\, dy| \le \int_0^{2\pi} \underbrace{|\cos(x-y)|}_{\le 1} \underbrace{|f(y)|}_{\le \|f\|_\infty} dy \le$$
$$\le 2\pi \|f\|_\infty,$$

där $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. Alltså följer

$$\|Af\|_\infty \le 2\pi \|f\|_\infty,$$

vilket medför $\|A\| \le 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $L^2[0, 2\pi]$: Linjäriteten trivial som ovan. Begränsningen av A följer av

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |Af(x)|^2\, dx \le \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)||f(y)|\, dy)^2\, dx \le \\
&\le \{\text{Hölders olikhet}\} \le \\
&\le \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)|^2\, dy)(\int_0^{2\pi} |f(y)|^2\, dy)\, dx \le 4\pi^2 \|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

där $\|f\|_{L^2} = (\int_0^{2\pi} |f(y)|^2\, dy)^{1/2}$. Alltså följer

$$\|Af\|_{L^2} \le 2\pi \|f\|_{L^2},$$

vilket medför $\|A\| \le 2\pi$.

$\|A\|_{C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]} = 4$: Vi noterar att

$$\|A\|_{C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]} \le \int_0^{2\pi} |\cos(x-y)|\, dy = \int_0^{2\pi} |\cos(y)|\, dy = 4.$$

För $n = 1, 2, \ldots$, låt f_n vara kontinuerliga funktioner på $[0, 2\pi]$ som uppfyller $\|f_n\|_\infty = 1$ och dessutom $= 1$ på intervallen $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \bigcup [\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{n}, 2\pi]$ och $= -1$ på intervallet $[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ (här kan f_n t.ex. väljas som styckvis linjära funktioner). Då gäller

$$Af_n(0) \le 4$$

samt

$$Af_n(0) \ge \int_0^{2\pi} |\cos(y)|\, dy - 2 \cdot \frac{2}{n} = 4 - \frac{4}{n},$$

vilket visar påståendet ovan.

$\|A\|_{L^2[0,2\pi]\to L^2[0,2\pi]} = \pi$: Vi noterar att A är en kompakt självadjungerad operator på Hilbertrummet L^2, varför $\|A\|_{L^2[0,2\pi]\to L^2[0,2\pi]} = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ egenvärde till } A\}$. Eftersom $Af(x) = a\cos x + b\sin x$, där $a, b \in \mathbb{R}$ beror på f, ges varje egenfunktion på denna form. Liten kalkyl ger att λ är ett egenvärde till A om ekvationssystemet

$$A(a\cos(\cdot) + b\sin(\cdot))(x) = \lambda(a\cos(x) + b\sin(x))$$

i a, b har en icke-trivial lösning, dvs om $\lambda = \pi$.

Uppgift 2

Vi har $f \in C[0,1], \lambda \in \mathbb{R}$, där $|\lambda| < e(e-1)$, och ska visa att

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x),\ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

   Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. Greenfunktionen ges av

   $$g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

   Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

   $$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0,\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

   Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e-e^t}{e-1}e^{-x}$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

   $$\begin{cases} (Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt,\ 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

   Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

   $$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt| \leq$$
   $$\leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)||u(t)| - |v(t)||dt \leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\|u-v\|_\infty$$

Sätt $j(x) = \int_0^1 |g(x,t)|dt$. Här är $j(x) = \int_0^1 g(x,t)(-1)dt$, lösningen till $j'' + j' = -1$ med randvillkoren $j(0) = j(1) = 0$. Alltså $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$ med $j_{\max} = j(\ln \frac{e}{e-1}) = \frac{1}{e-1} + \ln(1 - \frac{1}{e}) \leq \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}$.

Härav följer $\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{|\lambda|}{e(e-1)}\|u - v\|_\infty$, och Banach fixpunktssats medför att T har unik fixpunkt om $|\lambda| < e(e-1)$.

Uppgift 3

Givet avbildningen

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \dots, \frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n), \dots).$$

Visa att

1. $T : \ell^2 \to \ell^2$ är en begränsad linjär operator
2. T ej är surjektiv

Linjäriteten hos T är trivial.

T begränsad operator: Tag $\mathbb{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ och betrakta $\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2}$. VLOG kan vi anta att $x_n \geq 0$ för alla n.

$$\begin{aligned}
&\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} = x_1^2 + \frac{1}{2^2}(x_1 + x_2)^2 + \dots + \frac{1}{n^2}(x_1 + \dots x_n)^2 + \dots = \\
&= \Sigma_{k=1}^\infty x_k^2 (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots) + \\
&+ \Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=k+1}^\infty 2x_k x_j (\frac{1}{j^2} + \frac{1}{(j+1)^2} + \dots).
\end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\Sigma_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} \leq \begin{cases} \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n-1}, & n \geq 2 \\ 2 & n = 1 \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
&\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} \leq 2\|\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} + 2\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=k+1}^\infty x_k x_j \frac{1}{j-1} \leq \\
&\leq 2\|\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} + 4\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{x_k x_j}{k+j}.
\end{aligned}$$

Dessutom har vi

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{x_k x_j}{k+j} = \Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \{(\frac{1}{k+j})^{1/2}(\frac{k}{j})^{1/4} x_k\}\{(\frac{1}{k+j})^{1/2}(\frac{j}{k})^{1/4} x_j\} \leq \\
&\leq \{\text{Hölders olikhet}\} \leq \\
&(\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2} x_k^2)^{1/2} (\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{1}{k+j}(\frac{j}{k})^{1/2} x_j^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Här är

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2}x_k^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty}x_k^2\,\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2},$$

där

$$\begin{aligned}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2} &\leq \int_0^{\infty}\frac{1}{k+x}(\frac{k}{x})^{1/2}\,dx = \{y = \frac{x}{k}\} = \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{1+y}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = C,\end{aligned}$$

med C oberoende av k. Följdaktligen gäller

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{x_k x_j}{k+j} \leq C\|\mathbb{x}\|_{\ell^2}^2$$

vilket medför att $\|T\mathbb{x}\|_{\ell^2} \leq \sqrt{2+4C}\|\mathbb{x}\|_{\ell^2}$.

T ej surjektiv: Vi noterar att $T : \ell^2 \to \ell^2$ är injektiv, dvs $T\mathbb{x}_1 = T\mathbb{x}_2 \Rightarrow \mathbb{x}_1 = \mathbb{x}_2$, och begränsad. Om T är surjektiv så ger den inversa avbildningssatsen att T^{-1} är en begränsad linjär avbildning. Sätt

$$\mathbb{y}_n = (0,0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{plats } n},0,\dots).$$

Då gäller $\|\mathbb{y}_n\|_{\ell^2} = 1$ och

$$T^{-1}\mathbb{y}_n = (0,0,\dots,0,\underbrace{n}_{\text{plats } n},\dots),$$

dvs $\|T\mathbb{y}_n\|_{\ell^2} \geq n$, för alla n. Detta medför $\|T^{-1}\| = \infty$, vilket ger en motsägelse. Alltså T är ej surjektiv. (Alternativt kan man notera att följden

$$\mathbb{y} = (1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\dots) \in \ell^2$$

medan den enda sekvens $\mathbb{x}$ sådan att $T\mathbb{x} = \mathbb{y}$ ges av

$$\mathbb{x} = (1,-1,1,-1,1,-1,\dots) \notin \ell^2.)$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att $Tx_0 = x_0$ för ett $x_0 \in H$. Ska visa att $T^*x_0 = x_0$.

Betrakta

$$\begin{aligned}\|T^*x_0 - x_0\|^2 &= \langle T^*x_0 - x_0, T^*x_0 - x_0\rangle = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle T^*x_0, x_0\rangle - \langle x_0, T^*x_0\rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle x_0, Tx_0\rangle - \langle Tx_0, x_0\rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \|x_0\|^2 \leq (\|T^*\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = \\ &= (\|T\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Alltså gäller $T^*x_0 = x_0$.

Förslag till lösningar till tentamen i Funktionalanalys TMA400, 2000-01-15

Uppgift 1

Vi beräknar först Greenfunktionen till $\begin{cases} u'' + u' = F, x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)e(x,t) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}$$

där $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ bestäms av $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. Villkoren $g(0,t) = g(1,t) = 0, 0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < 1$$

Detta ger $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e - e^t}{e-1}e^{-x}$. Det ursprungliga problemet har en entydigt bestämd lösning om och endast om avbildningen $T : C[0,1] \to C[0,1]$ har en unik fixpunkt, där

$$(Tu)(x) = \int_0^1 g(x,t)(\cos t - \sin(u(t))dt, \quad 0 \le x \le 1.$$

For $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\sin(v(t)) - \sin(u(t)))dt| \le$$

$$\le \int_0^1 |g(x,t)||v(t) - u(t)|dt \le \int_0^1 |g(x,t)|dt\|u - v\|_\infty.$$

Vi noterar att $g(x,t) \le 0$ alla x, t varför $\int_0^1 |g(x,t)|dt = \int_0^1 g(x,t) \cdot (-1)dt$ är lösningen till $j'' + j' = -1, j(0) = j(1) = 0$. Alltså fås $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$. Vi ser att $j_{\max} < 1$, varför avbildningen T är en kontraktion. Banachs fixpunktsats medför att T har en unik fixpunkt.

Uppgift 2

A självadjungerad kompakt operator på Hilbertrum H med $\|A\| \le 1$. Vi noterar att om λ egenvärde till A så gäller $\lambda \in [-1,1]$ då $|\lambda|\|u\| = \|Au\| \le \|A\|\|u\|$. Låt nu $\{e_n\}$ vara ett ON-system av egenfunktioner till A, svarande mot egenvärdena $\{\lambda_n\}$ så att

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle e_n, \quad u \in H.$$

Det gäller att

$$(A^4 - A^2)u = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^4 - \lambda_n^2)\langle u, e_n \rangle e_n, \quad u \in H$$

och alltså

$$\|(A^4 - A^2)u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^4 - \lambda_n^2)^2 |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

Men $|x^4 - x^2| \leq \frac{1}{2}$ för $x \in [-1,1]$ och alltså gäller $|\lambda_n^4 - \lambda_n^2| \leq \frac{1}{2}$, alla n. Följdaktligen gäller

$$\|(A^4 - A^2)u\|^2 \leq (\frac{1}{2})^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2 \leq (\frac{1}{2}\|u\|)^2$$

Påståendet i uppgiften följer.

Uppgift 3

a) K_2^* integraloperator på $L^2(0\infty)$ given av kärnan

$$k_2^*(x,y) = \overline{k_2(y,x)} = \chi_{\{y>x>0\}}(x,y)\frac{1}{x+y}.$$

Eftersom $k_1(x,y) = k_2(x,y) + k_2^*(x,y)$ utom på en nollmängd gäller $K_1 = K_2 + K_2^*$.

b) $|K_2 f(x)| = |\int_0^x \frac{1}{x+y} f(y)dy| \leq \int_0^x \frac{1}{x+y}|f(y)|dy \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(y)|dy, x > 0$ medför $|K_2 f(x)| \leq K_3|f|(x)$. Alltså gäller

$$\|K_2\| = \sup_{\substack{f\in L^2 \\ f\neq 0}} \frac{1}{\|f\|_{L^2}}\|K_2 f\|_{L^2} \leq \sup_{\substack{f\in L^2 \\ f\neq 0}} \frac{1}{\|f\|_{L^2}}\|K_3|f|\|_{L^2} = \{k_3 \geq 0\} = \|K_3\|$$

c) Eftersom $\|K_1\| \leq \|K_2\| + \|K_2^*\| = 2\|K_2\| \leq 2\|K_3\|$ räcker det att visa att $\|K_3\| \leq 2$. För $f, g \in L^2(0,\infty)$ gäller

$$\begin{aligned}
&|\langle K_3 f, g\rangle_{L^2}| = |\int_0^\infty \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\overline{g(x)}dx| = \\
&= |\int_0^\infty \int_0^1 f(xs)ds\overline{g(x)}dx| = |\int_0^1 \int_0^\infty f(xs)\overline{g(x)}dxds| \leq \\
&\leq \{\text{Hölders olikhet}\} \leq \\
&\leq \int_0^1 (\int_0^\infty |f(xs)|^2 dx)^{1/2}\|g\|_{L^2} ds = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} ds = [2\sqrt{s}]_0^1 \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} = (2\|f\|_{L^2})\|g\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\|K_3 f\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{L^2} \quad \text{alla} \quad f \in L^2(0,\infty)$$

Vi får $\|K_3\| \leq 2$.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 1999-08-21

Uppgift 1

Låt $\mathbf{H}$ beteckna Hilbertrummet $L^2([0,1])$. Sätt $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ och $f_3(x) = 1$. Infimum antas för

$$\begin{cases} a = -\frac{\langle f_1, f_2\rangle}{||f_2||^2} \\ \\ b = -\frac{\langle f_1, f_3\rangle}{||f_3||^2} \end{cases}.$$

En rättfram kalkyl ger $a = -\frac{5}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$ och

$$\int_0^1 |x - \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}|^2 \, dx = \frac{3}{16}.$$

Alternativt kan man minimera funktionen $F(a,b) = \int_0^1 |x + ax^2 + b|^2 \, dx$.

Uppgift 2

Vi har $f \in C[0,1], \lambda \in \mathbb{R}$, där $|\lambda| < e(e-1)$, och ska visa att

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), \; x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

   Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. Greenfunktionen ges av

   $$g(x,t) = \theta(x-t)(1 - e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

   Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

   $$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0, \; 0 < t < 1. \end{cases}$$

   Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e - e^t}{e-1}e^{-x}$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

   $$\begin{cases} (Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt, \; 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

   Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt.

För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt| \leq$$
$$\leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)||u(t)| - |v(t)||dt \leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\|u - v\|_\infty$$

Sätt $j(x) = \int_0^1 |g(x,t)|dt$. Här är $j(x) = \int_0^1 g(x,t)(-1)dt$, lösningen till $j'' + j' = -1$ med randvillkoren $j(0) = j(1) = 0$. Alltså $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$ med $j_{\max} = j(\ln \frac{e}{e-1}) = \frac{1}{e-1} + \ln(1 - \frac{1}{e}) \leq \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}$.

Härav följer $\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{|\lambda|}{e(e-1)}\|u - v\|_\infty$, och Banach fixpunktssats medför att T har unik fixpunkt om $|\lambda| < e(e-1)$.

Uppgift 3

Antag att det inte finns någon punkt $p \in K$ sådan att $f(p) = g(p)$. För varje $p \in K$ definiera nu $h(p)$ som skärningspunkten mellan randen ∂K och den del av strålen från $f(p)$ genom punkten $g(p)$ som ej ligger mellan $f(p)$ och $g(p)$. Då gäller att $h : K \to \partial K$ är en kontinuerlig funktion. Då K är sluten konvex mängd måste funktionen h enligt Brouwers fixpunktssats ha en fixpunkt i K. Detta är omöjligt då $h(K) \subset \partial K$ och för varje punkt $p \in \partial K$ gäller $p \neq h(p)$ p.g.a. konstruktionen och antagandet att $p = f(p)$.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

För ändligtdimensionella Hilbertrum gäller att alla begränsade linjära avbildningar är kompakta varför vi direkt får att påstående (a) är sant medan påstående (b) är falskt. Vi antar nu att Hilbertrummet är oändligtdimensionellt. Då gäller att

- (a) är falsk, vilket följande exempel visar: Låt $n = 2$, $\mathbf{H} = l^2$ och att $A : l^2 \to l^2$ är given av

  $$A(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots).$$

  Då gäller att A är en begränsad linjär operator ($\|A\| = 1$) och att $A^2 = 0$ men ej att A är kompakt.

- (b) är sann, ty om A är kompakt så måste också A^n vara kompakt men I är ej en kompakt operator.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 1999-05-25

Uppgift 1

Vi har

$$\ell^1 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} \text{ (eller } \mathbb{C}) \text{ alla } n \ \& \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

och

$$\ell^2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} \text{ (eller } \mathbb{C}) \text{ alla } n \ \& \ (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2} < \infty\}.$$

$\ell^1 \subseteq \ell^2$: Fixera $\mathbb{x} = (x_n) \in \ell^1$. Då $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ finns N så att $|x_n| < 1$ för $n > N$. Alltså gäller $|x_n|^2 \leq |x_n|$ för $n > N$. Detta medför

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}_{<\infty \text{ då ändlig summa}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|}_{<\infty} < \infty.$$

Alltså $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty$ och $\mathbb{x} \in \ell^2$.

ℓ^1 delrum är ℓ^2: Då ℓ^1 linjärt rum gäller att varje linjärkombination av element i ℓ^1 ligger i ℓ^1 och alltså i ℓ^2. Påståendet visat.

ℓ^1 ej sluten i ℓ^2: Det finns $\mathbb{x} \in \ell^2 \setminus \ell^1$, t.ex. $\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_n = \frac{1}{n}$. Vidare ligger varje sekvens som endast innehåller ändligt många nollskilda element i ℓ^1. Slutligen är mängden av alla sekvenser med ändligt många nollskilda element tät i ℓ^2. Alltså $\ell_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \bar{\ell}_1 = \ell^2$. (Observera skillnaden mellan ℓ^1-topologin och ℓ^2-topologin)

Uppgift 2

Vi har $f \in C[0,1], \lambda \in \mathbb{R}$, där $|\lambda| < e(e-1)$, och ska visa att

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda |u(x)| = f(x), \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

   Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. Greenfunktionen ges av

   $$g(x,t) = \theta(x-t)(1 - e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0,\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e-e^t}{e-1}e^{-x}$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = \int_0^1 g(x,t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt,\ 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt| \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)||u(t)| - |v(t)||dt \leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\|u - v\|_\infty$$

Sätt $j(x) = \int_0^1 |g(x,t)|dt$. Här är $j(x) = \int_0^1 g(x,t)(-1)dt$, lösningen till $j'' + j' = -1$ med randvillkoren $j(0) = j(1) = 0$. Alltså $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$ med $j_{\max} = j(\ln \frac{e}{e-1}) = \frac{1}{e-1} + \ln(1 - \frac{1}{e}) \leq \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}$.

Härav följer $\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{|\lambda|}{e(e-1)}\|u - v\|_\infty$, och Banach fixpunktssats medför att T har unik fixpunkt om $|\lambda| < e(e-1)$.

Uppgift 3

$A : H \to H$ kompakt självadjungerad operator på Hilbertrummet H. Då finns egenvektorer u_n, ändligt eller uppräkneligt många, svarande mot egenvärden λ_n till $A, \infty > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$ sådan att $A = \sum_n \lambda_n P_n$ där P_n är projektionsoperatorn som avbildar H på Span (u_n). Då gäller på grund av att A är självadjungerad att $\lambda_n \in \mathbb{R}$ för alla n. Sätt

$$B = \sum_n \max(0, \lambda_n) P_n$$

$$C = -\sum_n \min(0, \lambda_n) P_n$$

Då gäller eftersom Span $(u_k) \perp$ Span (u_n) för $n \neq k$ att B (och på samma sätt för C) är kompakt, självadjungerad (bör visas) och positiv då $\langle Bx, x\rangle = \sum_n \max(0, \lambda_n)|\langle x, u_n\rangle|^2 \geq 0$.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Antag $x_n \rightharpoonup 0$ i H, där H är ett Hilbertrum (annars betrakta följden $x_n - x$). Sätt $x_{n_1} = x_1$. Välj x_{n_k} rekursivt enligt följande: Antag att $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ valda. Välj x_{n_k} så att $\langle x_{n_\ell}, x_{n_k}\rangle < \frac{1}{k}$, $\ell = 1, 2, \dots, k-1$. Detta är möjligt då $x_n \rightharpoonup 0$.

Notera vidare att $\sup\limits_n \|x_n\| \le M < \infty$ för något M då $\{x_n\}$ är en svagt konvergent följd.

Sätt $y_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} x_{n_k} \quad m = 1, 2, 3, \dots.$

Då gäller

$$
\begin{aligned}
\|y_m\|^2 &= \frac{1}{m^2}\langle \sum_{k=1}^{m} x_{n_k}, \sum_{\ell=1}^{m} x_{n_\ell}\rangle = \\
&= \frac{1}{m^2}\Bigg\{ \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\underbrace{\langle x_{n_k}, x_{n_k}\rangle}_{\|x_{n_k}\|^2}}_{\le M^2} + \underbrace{2 \sum_{1=\ell<k\le m} \underbrace{\langle x_{n_\ell}, x_{n_k}\rangle}_{|\dots|<\frac{1}{k}}}_{<2\sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{k}<2m} \Bigg\} \le \\
&\le \frac{1}{m^2}(mM^2 + 2m) = \frac{M^2+2}{m} \to 0 \text{ då } m \to \infty.
\end{aligned}
$$