



4th May 2004

TMA401 Functional Analysis
MAN670 Applied Functional Analysis
4th quarter 2003/2004

Gamla tentor från

2000 – dags dato

lösningsförslag

Lösningsskisser till tentamen i TMA401/MAN670, 2004-01-12

1. We will prove that

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{u(x)}{2+u^2(x)}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a unique solution.

1. Determine the Green's function for $\begin{cases} u'' + u = F \\ u(0) = m(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$:

Set $e(x, t) = a_1(t) \cos x + a_2(t) \sin x$, where $e(t, t) = 0$ and $e'_x(t, t) = 1$. This gives $e(x, t) = \sin(x - t)$. The Green's function takes the form

$$g(x, t) = \sin(x - t)\theta(x - t) + b_1(t) \cos x + b_2(t) \sin x.$$

Here $g(0, t) = g(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ for $0 < t < \frac{\pi}{2}$ implies that

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \sin(x - t)\theta(x - t) - \sin x \cos t = \\ &= \begin{cases} -\cos x \sin y, & x > t \\ -\sin x \cos t, & x < t \end{cases} \end{aligned}$$

We see that $g(x, t) \leq 0$ for all $x, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Set

$$\begin{cases} (Tu)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, t) \frac{u(t)}{2+u^2(t)} dt, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ u \in C([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point. For $u, v \in C([0, \frac{\pi}{2}])$ we get

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x, t)| \left| \frac{u(t)}{2+u^2(t)} - \frac{v(t)}{2+v^2(t)} \right| dt \leq \\ &\leq \{\text{mean value theorem}\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x, t)| dt \|u - v\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{4} \|u - v\|_{\infty} \end{aligned}$$

This shows that T is a contraction on the space $C([0, \frac{\pi}{2}])$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

2. Set $Tf(x) = \int_0^1 (x+y)f(y)dy$ for $f \in L^2([0, 1])$. T is bounded since

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 (x+y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \{\text{Hölder}\} \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2 dy \|f\|_{L^2}^2 dx = \frac{7}{6} \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

and hence $\|T\| \leq \sqrt{\frac{7}{6}}$.

To calculate $\|T\|$ we observe that T is a compact, self-adjoint operator on the Hilbert space $L^2([0, 1])$ and hence

$$\|T\| = \sup_{\lambda \text{ eigenvalue to } T} |\lambda|.$$

Note that $Tf(x) = \int_0^1 f(y)dy x + \int_0^1 yf(y)dy$ is a polynomial of degree ≤ 1 and hence λ is an eigenvalue to T with eigenfunction $ax + b$ if

$$\lambda(ax + b) = \int_0^1 (ay + b)dy x + \int_0^1 y(ay + b)dy, x \in [0, 1].$$

i.e.,

$$\begin{cases} \lambda a = \frac{1}{2}a + b \\ \lambda b = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

This system has a non-trivial solution iff

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

We obtain the eigenvalues $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ and so $\|T\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. From problem 1 we can restate the problem as to show that the mapping,

$$Tu(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,t) \frac{u(t)}{2+u^2(t)} dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

for $u \in C([0, \frac{\pi}{2}])$, has a fixed point in $C([0, \frac{\pi}{2}])$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. For $|\lambda|$ large enough we cannot refer to the Banach's fixed point theorem since T is no longer a contraction. Instead we can use the Schander's fixed point theorem.

Fix a $\lambda \in \mathbb{R}$.

Note that $g(x,t)$ is a continuous function for $0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}$ and $f(u) \equiv \lambda \frac{u}{2+u^2}$ is a bounded function for $u \in \mathbb{R}$ (note that λ is fixed.)

We will choose a closed convex set $S \subset C([0, \frac{\pi}{2}])$ such that the mapping $T : S \rightarrow S$ is continuous and the image set $T(S)$ is relatively compact in $C([0, \frac{\pi}{2}])$.

Take $S = \{u \in C([0, \frac{\pi}{2}]) : \|u\| \leq D\}$, where D is to be chosen such that $T(S) \subset S$. Since g is continuous on the compact set $\{(x, y) : 0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}\}$ it is bounded on this set and so

$$\sup_{\substack{0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2} \\ u \in \mathbb{R}}} |g(x,t)f(u)| = E < \infty$$

which yields $|(Tu)(x)| \leq \frac{\pi}{2}E$ for all $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ and $u \in C([0, \frac{\pi}{2}])$. Hence $T(S) \subset S$ if $D = \frac{\pi}{2}E$.

Now it remains to prove that $T(S)$ is relatively compact in $C([0, \frac{\pi}{2}])$ and $TS \rightarrow S$ is continuous. The first statement follows from the Arzela-Aschi Theorem, since $T(S)$ is uniformly bounded and equicontinuous (the latter follows from the uniform continuity of g on $\{(x, t) : 0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}\}$), and the second statement follows from the uniform continuity of $f(y)$ for $-D \leq u \leq D$ and the boundedness of g .

The existence of a fixed point for T now follows from Schander's fixed point theorem.

(Remark: As a matter of fact one trivially observes that $u = 0$ is a solution to the problem. However to treat the problem with the RHS in the differential equation replaced by the original one $+1$ is harder but the method above yields a solution.)

4. See textbook.
 5. $T : X \rightarrow X$, where X is a real normal space, is continuous and satisfies

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{for all } x, y \in X. \tag{*}$$

We shall prove that

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \text{for all } x \in X \text{ and } \lambda \in \mathbb{R} \tag{**}$$

It follows from (*) that

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ since $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = 2T(\mathbf{0})$.
- $T(nx) = nT(x)$ for positive integers n since

$$T(nx) = T(x + (n - 1)x) = T(x) + T((n - 1)x) = \dots = nT(x)$$

- $T(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}T(x)$ for positive integers n since

$$T(x) = T(n(\frac{1}{n}x)) = nT(\frac{1}{n}x).$$

Combining these observations we see that $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ for all $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{Q}$. To prove (**) we fix a $\lambda \in \mathbb{R}$ and an $x \in X$ and take a sequence $\lambda_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \dots$, such that $\lambda_n \rightarrow \lambda$ in \mathbb{R} . This implies that $\lambda_n x \rightarrow \lambda x$ in X . It also implies $\lambda_n T(x) \rightarrow \lambda T(x)$ in X . Since T is continuous we conclude that $T(\lambda_n x) \rightarrow T(\lambda x)$ in X . But, $T(\lambda_n x) = \lambda_n T(x) \rightarrow \lambda T(x)$ in X and so

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

The statement is proved.

6. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis in H and $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ an ON-sequence in H such that $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1$. We shall show that also $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ is an ON-basis.

Set $S = \overline{\text{span}\{y_n : n = 1, 2, \dots\}}$. Then S is a closed subspace of H . It remains to prove that $S = H$.

Assume that $S \neq H$. Then $S^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$ and there is an $x \in S^{\perp}$ with $\|x\| > 0$. We have

$$\langle x, y_n \rangle = 0, n = 1, 2, \dots$$

since $x \in S^{\perp}$. Parseval's formula yields

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle - \langle x, y_n \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n - y_n \rangle|^2 \leq \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \|x_n - y_n\|^2 < \|x\|^2. \end{aligned}$$

This yields a contradiction and hence $S = H$.

Kortfattade lösningsskisser till tentamen i TMA401/MAN670, 2003-08-30

Problem 1

We will prove that

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = \lambda \frac{u(x)}{1+u^2(x)}, & x \in (0, 1) \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda|$ small enough.

1. Determine the Green's function $g(x, t)$ for

$$\begin{cases} u'' - u = F & x \in (0, 1) \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0 \end{cases}$$

Set (standard calculation)

2. Set

$$\begin{cases} (Tu)(x) = \int_0^1 g(x, t) \cdot \lambda \frac{u(t)}{1+u^2(t)} dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0, 1] \end{cases}$$

The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point. For $u, v \in C[0, 1]$ we obtain

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq \dots (\text{standard calculations}) \dots \leq C(\lambda) \|u - v\|_\infty.$$

This shows that T is a contraction on the Banach space $C[0, 1]$ provided $C(\lambda) < 1$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

Problem 2

The solution is a straight forward application of the Gram-Schmidt process and we only refer to the textbook for more information.

Problem 3

We have to show that the ON-sequence $(u_n)_{n=1}^\infty$ in $L^2([0, 1])$ is complete if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x u_n(t) dt \right|^2 = x \text{ for all } x \in [0, 1] \quad (1)$$

Formula (1) can be reformulated as

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2 = \|\chi_{[0,x]}\|^2 \text{ for all } x \in [0, 1],$$

where

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & t \in I \\ 0 & t \notin I \end{cases},$$

since

$$\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle = \int_0^1 \chi_{[0,x]}(t) \overline{u_n(t)} dt = \overline{\int_0^x u_n(t) dt}$$

and

$$\|\chi_{[0,x]}\|^2 = \int_0^1 |\chi_{[0,x]}(t)|^2 dt = \int_0^x dt = x.$$

To show that $(u_n)_{n=1}^\infty$ is complete it is enough to show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, u_n \rangle|^2 = \|f\|^2 \text{ for all } f \in L^2([0, 1]). \quad (2)$$

Here it suffices to show that (2) is true for a dense set A in $L^2([0, 1])$, since if $f_k \rightarrow f$ in L^2 and (2) is true for $f_k, k = 1, 2, \dots$, then we have

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, u_n \rangle|^2 = \\
 &= \|(f - f_k) + f_k\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle (f - f_k) + f_k, u_n \rangle|^2 \leq \\
 &\leq \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f_k\|^2 - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f - f_k, u_n \rangle + \langle f_k, u_n \rangle) \overline{(\langle f - f_k, u_n \rangle + \langle f_k, u_n \rangle)} = \\
 &= \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_k, u_n \rangle|^2 - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} (|\langle f - f_k, u_n \rangle|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f - f_k, u_n \rangle \overline{\langle f_k, u_n \rangle} + \\
 &+ |\langle f_k, u_n \rangle|^2) \leq \\
 &\leq \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f - f_k\|^2 + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f - f_k, u_n \rangle| \cdot |\langle f_k, u_n \rangle| \leq \\
 &\leq 2\|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \\
 &+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f - f_k, u_n \rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_k, u_n \rangle|^2\right) \leq \\
 &\leq 2\|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f - f_k\| \|f_k\| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

as $k \rightarrow \infty$. Here we have used that $\sup_k \|f_k\| < \infty$, which follows from $f_k \rightarrow f$ in L^2 , and repeatedly applied Bessel's inequality.

Now we take A to be the set of all finite linear combinations of χ_I , where the I 's are subintervals of $[0, 1]$. Then A is dense in $L^2([0, 1])$. Set $g = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{I_k}$ where the intervals I_k are pairwise disjoint subintervals of $[0, 1]$ and $a_k \in \mathbb{C}$.

We know that (2) is valid for $f = \chi_{[0,x]}$. It remains to show that:

- $f = \chi_{[y,x]}$ satisfies (2)
- f, g satisfies (2) and have disjoint support implies that any linear combination of f, g satisfies (2).

Fix $0 < y < x \leq 1$. We note that

$$\begin{aligned}
 \|\chi_{[0,x]}\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2 \\
 \|\chi_{[0,y]}\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

This yields

$$\|\chi_{[y,x]}\|^2 = x - y$$

and

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[y,x]}, u_n \rangle|^2 = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]} - \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle - \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 - \\
& \quad - 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle \overline{\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle} = \\
& = x + y - 2\operatorname{Re} \langle \chi_{[0,x]}, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle u_n \rangle = (!) = \\
& = x + y - 2\operatorname{Re} \langle \chi_{[0,x]}, \chi_{[0,y]} \rangle = x + y - 2\|\chi_{[0,y]}\|^2 = x - y.
\end{aligned}$$

Note that at (!) we have used the fact

$$\chi_{[0,y]} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle u_n$$

which follows from (3).

We have thus found that $\chi_{[y,x]}$ satisfies (2). To prove the second statement we have to do similar calculations (do it yourself!!!) and the full statement that $g \in A$ implies g satisfies (2) follows by induction over N (see the expression for g above).

Problem 4 & 5 & 6

See the textbook

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2003-05-31

Problem 1

We will prove that

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

has a unique solution.

1. Determine the Green's function for $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$:

Set $e(x, t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ where $\begin{cases} e(t, t) = 0 \\ e'_x(t, t) = 1 \end{cases}$. This gives $e(x, t) = 1 - e^{t-x}$. The Green's function takes the form

$$g(x, t) = \theta(x - t)(1 - e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

Here $g(0, t) = g(1, t) = 0$, $0 < t < 1$ implies

$$\begin{cases} b_1(t) = \frac{e^t - 1}{e - 1} \\ b_2(t) = -\frac{e^t - 1}{e - 1}, \end{cases}$$

Hence $g(x, t) = \theta(x - t)(1 - e^{t-x}) + \frac{e^t - 1}{e - 1}(1 - e^{-x})$. We see (a simple calculation) that $g(x, t) \leq 0$ for all x, t .

2. Set

$$\begin{cases} (Tu)(x) = \int_0^1 g(x, t) \arctan u(t^2) dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0, 1] \end{cases}$$

The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point. For $u, v \in C[0, 1]$ we obtain

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \int_0^1 |g(x, t)| |\arctan u(t^2) - \arctan v(t^2)| dt \leq \\ &\leq \{\text{mean value theorem}\} \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x, t)| |u(t^2) - v(t^2)| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 (-g(x, t)) dt \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Vi note that (small calculation)

$$\int_0^1 (-g(x, t)) dt = \max_{0 \leq x \leq 1} \left(-x + \frac{e}{e - 1}(1 - e^{-x})\right) \equiv c < 1$$

and hence

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq c \|u - v\|_\infty.$$

This shows that T is a contraction on the Banach space $C[0, 1]$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

Problem 2

Let T , H , $(e_n)_{n=1}^\infty$ and $(f_n)_{n=1}^\infty$ be as in the formulation of the problem. We note that since $(e_n)_{n=1}^\infty$ is an ON-basis for H we have

$$f_n = \sum_{k=1}^\infty \langle f_n, e_k \rangle e_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

and since T is continuous we get

$$Tf_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_n, e_k \rangle T e_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

This yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \langle f_n, e_k \rangle \langle T e_k, T e_l \rangle \overline{\langle f_n, e_l \rangle}.$$

and since the series is absolutely convergent we can change the order of summation. Observing that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, e_k \rangle \overline{\langle f_n, e_l \rangle} = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_l, f_n \rangle f_n, e_k \rangle = \langle e_l, e_k \rangle$$

we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|^2.$$

Moreover $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ implies $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n$ and

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \|T e_n\| \leq \\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} \|T e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\| (\sum_{n=1}^{\infty} \|T e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

by Parseval's formula. Hence we get

$$\|T\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T e_n\|^2.$$

Problem 3 Let

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0$$

for $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. We observe that $Mf(x) \in \mathbb{R}$ for $x > 0$. Moreover for every continuous function f with compact support in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ we note that

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^2 dt < \infty$$

and that

$$\begin{aligned} \|Mf\|^2 &\leq \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^2 dt = \left[-\frac{1}{t} \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^2 \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds f(t) dt \leq \\ &\leq 0 + 2 \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

i.e. we get

$$\|Mf\| \leq 2\|f\|.$$

Now we recall that the set of continuous functions with compact support in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ is dense in $L^2(\mathbb{R}_+)$ and from the inequality above we get that $Mf \in L^2$ for every $f \in L^2$ and that $\|M\| \leq 2$, and in particular that M is bounded. A straight-forward calculation show that

$$M^*f(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{t} f(t) dt, \quad x > 0$$

and that

$$\|(I - M)f\|^2 = \|f\|^2$$

for all $f \in L^2$. From this it follows that

$$\|I - M\| = 1.$$

Problem 4 & 5

See the textbook

Problem 6 We want to show that there exists a $C > 0$ such that for every $y \in \mathcal{R}(I + T)$ there exists a $x \in X$ with $(I + T)x = y$ satisfying

$$\|x\| \leq C\|y\|.$$

First we fix a $y \in \mathcal{R}(I + T)$ and set

$$d(y) = \inf\{\|x\| : (I + T)x = y\}.$$

Claim: There exists an $\tilde{x} \in X$ with $(I + T)\tilde{x} = y$ such that $\|\tilde{x}\| = d(y)$. To see this take a sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ with $(I + T)x_n = y$ such that $\|x_n\| \rightarrow d(y)$. Since this sequence is bounded there is a converging subsequence of $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$, let this still be denoted by $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$, converging to say $z \in X$. Here we used the fact that T is compact. But then $x_n \rightarrow y - z$ in X and hence $\tilde{x} = y - z$ has the desired property.

Now assume that there is no $C > 0$ with the property above. Then there are sequences $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfying $(I + T)x_n = y_n$ such that

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \rightarrow \infty.$$

Since T is linear we can without loss of generality assume that $\|\tilde{x}_n\| = 1$ for all n . Since T is compact there exists a converging subsequence of $(T\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, call it still $(T\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$, converging to say v in X . We also have

$$\tilde{x}_n \rightarrow -v \quad \text{in } X.$$

But since $\|y_n\| \rightarrow 0$ in X ($\|\tilde{x}_n\| = 1$ for all n) and since T is continuous (T is compact linear) we obtain $v = -Tv$. By the definition of \tilde{x}_n this yields a contradiction since $(I + T)(\tilde{x}_n - v) = y_n$ and

$$\|\tilde{x}_n - v\| \geq \|\tilde{x}_n\| = 1$$

is valid for every n . The conclusion in problem 6 follows.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-08-21

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatoren A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \frac{y-x}{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$\begin{aligned} A^*Af(x) &= \int_0^1 (y-x)Af(y) dy = \int_0^1 (y-x) \left(\int_0^1 (y-z)f(z) dz \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (y-x)(y-z) dy \right) f(z) dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz \right) f(z) dz, \end{aligned}$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatoren ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax + b), \quad \text{alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

$$1. \text{ Greenfunktion till } \begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} :$$

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x-t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t-1, \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t .

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = - \int_0^1 g(x,t) \left(2 + \frac{1}{1+u^2(x)} \right) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt.

För $u, v \in C[0, 1]$ gäller

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \int_0^1 |g(x, t)| \left| \frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x, t)| \left| \frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x, t)| \left| \frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} \right| dt \|u-v\|_\infty. \end{aligned}$$

Vi noterar att $\left| \frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{1+a^2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{2b}{1+b^2} \right| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x, t)| dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2} (1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|u - v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0, 1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x \rangle = \sum_i \lambda_i |\langle x, e_i \rangle|^2$$

där $\lambda_i \geq 0$, e_i , $i = 1, 2, \dots$, betecknar egenvärdena respektive motsvarande normerade egenvektorer till operatoren T . Låt n vara ett fixerat positivt heltal > 1 (om $n = 1$ är påståendet trivialt sant). Hölders olikhet med exponenterna n och n^* , där $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^*}$, tillsammans med Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x \rangle \leq (\sum_i \lambda_i^n |\langle x, e_i \rangle|^{\frac{2}{n}})^{1/n} \cdot (\sum_i |\langle x, e_i \rangle|^{(2-\frac{2}{n})n^*})^{1/n^*} = \langle T^n x, x \rangle^{1/n} \cdot \|x\|^{2(n-1)/n}.$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-06-01

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatoren A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \frac{y-x}{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$\begin{aligned} A^*Af(x) &= \int_0^1 (y-x)Af(y) dy = \int_0^1 (y-x) \left(\int_0^1 (y-z)f(z) dz \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (y-x)(y-z) dy \right) f(z) dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz \right) f(z) dz, \end{aligned}$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatoren ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax + b), \quad \text{alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

$$1. \text{ Greenfunktion till } \begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} :$$

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x-t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t-1, \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t .

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = - \int_0^1 g(x,t) \left(2 + \frac{1}{1+u^2(x)} \right) dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt.

För $u, v \in C[0, 1]$ gäller

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \int_0^1 |g(x, t)| \left| \frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x, t)| \left| \frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x, t)| \frac{|u(t)+v(t)|}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))} dt \|u-v\|_\infty. \end{aligned}$$

Vi noterar att $\left| \frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{1+a^2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{2b}{1+b^2} \right| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x, t)| dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2} (1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|u - v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0, 1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Låt T vara en avbildning på ett normerat rum X som uppfyller följande villkor: Det finns ett reellt tal C och ett reellt tal $\alpha > 1$ sådana att

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \|x - y\|^\alpha, \quad \text{alla } x, y \in X.$$

Vi ska visa att $T(x) = T(\emptyset)$ för alla $x \in X$.

Fixera ett godtyckligt $x \in X$. Sätt $\delta = \|T(x) - T(\emptyset)\|$. Fixera ett positivt heltal n och sätt $x_k = \frac{k}{n}x \in X$ för $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Då gäller

$$\begin{aligned} \delta &= \|T(x_n) - T(x_{n-1}) + T(x_{n-1}) - \dots - T(x_0)\| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T(x_{k+1}) - T(x_k)\| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\|^\alpha = \\ &= C \|x\|^\alpha \cdot n^{\alpha-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Detta medför att $\delta = 0$ och påståendet i uppgiften är visat.

Anm: Om $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uppfyller

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C |x - y|^\alpha, \quad \text{alla } x, y \in \mathbf{R}$$

så gäller att

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \left| \frac{T(x+h) - T(x)}{h} - 0 \right| = 0, \quad \text{alla } x \in \mathbf{R}$$

dvs. T är en deriverbar funktion med derivatan $= 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ och alltså är T en konstant funktion.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en självadjungerad operator på ett Hilbertrum H för vilken T^n är kompakt för något heltal $n \geq 2$. Vi ska visa att T är kompakt.

Vi noterar att T självadjungerad innebär (per definition) att T är en begränsad operator. T är kompakt om vi kan visa att T^k kompakt implicerar att T^{k-1} är kompakt för godtyckligt heltal $k \geq 2$.

Antag nu att T^k är kompakt för fixt $k \geq 2$. Låt $(x_n)_{n=1}^\infty$ vara en begränsad följd i H , dvs det finns ett reellt tal M sådant att $\|x_n\| \leq M$ för alla n . Då T^k är kompakt finns det en delföljd (x_{p_n}) av

(x_n) för vilken $(T^k x_{p_n})$ konvergerar i H . Då konvergerar också $(T^{k-1} x_{p_n})$ i H eftersom

$$\begin{aligned} \|T^{k-1} x_{p_n} - T^{k-1} x_{p_m}\|^2 &= \langle T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m}) \rangle = \\ &= \langle T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^k(x_{p_n} - x_{p_m}) \rangle \leq \\ &\leq \|T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m})\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\| \leq \\ &\leq \|T^{k-2}\| \cdot \|x_{p_n} - x_{p_m}\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\| \leq \\ &\leq \underbrace{2\|T\|^{k-2} M}_{< \infty} \cdot \underbrace{\|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\|}_{\rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

och varje Cauchyföljd i ett Hilbertrum konvergerar. Detta medför att T^{k-1} är kompakt och påståendet i uppgiften är visat.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2001-05-30

1. A är integraloperator med kärnan $a(x, y) = e^{x+y} \cos(x+y)$, där $a \in C([0, \pi] \times [0, \pi])$ och $a(x, y) = a(y, x)$.

a) Banachrummet $C[0, \pi]$: För $u \in C[0, \pi]$ gäller

$$|Au(x)| \leq \int_0^\pi e^{x+y} |\cos(x+y)| dy \|u\|_\infty \equiv I(x) \|u\|_\infty, x \in [0, \pi],$$

där $I \in C[0, \pi]$. Alltså $\|A\| \leq \max_{x \in [0, \pi]} I(x) = I(x_0)$ för något $x_0 \in [0, \pi]$. Vidare gäller $I(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n(x)$ där

$$u_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{då } \min(|x+x_0 - \frac{\pi}{2}|, |x+x_0 - \frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \text{ \& } \cos(x+x_0) > 0 \\ -1 & \text{då } \min(|x+x_0 - \frac{\pi}{2}|, |x+x_0 - \frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \text{ \& } \cos(x+x_0) < 0 \\ \text{till beloppet } \leq 1 & \text{och kontinuerlig för övrigt} \end{cases}$$

Här approximerar u_n -funktionerna funktion $\text{sign}(\cos(x_0 + \cdot))$. (Liten kalkyl ger $I(x_0) = I(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$).

b) Banachrummet $L^2[0, \pi]$: Då L^2 är Hilbertrum och A är självadjungerad gäller

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ egenvärde till } A\}.$$

Då $Au(x) = \int_0^\pi e^x \cdot e^y (\cos x \cos y - \sin x \sin y) u(y) dy = ae^x \cos x + be^x \sin x$ fås egenvärdena λ som lösningar till $A(ae^x \cos x + be^x \sin x) = \lambda(ae^x \cos x + be^x \sin x)$ för $|a| + |b| > 0$, dvs

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{8} - \frac{\lambda}{e^{2\pi} - 1}\right)a - \frac{1}{8}b = 0 \\ \frac{1}{8}a - \left(\frac{3}{8} + \frac{\lambda}{e^{2\pi} - 1}\right)b = 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger } \lambda = \pm(e^{2\pi} - 1) \frac{5}{32}.$$

Detta ger $\|A\| = \frac{5}{32}(e^{2\pi} - 1)$.

Svar:

$$\|A\|_{C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]} = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$$

$$\|A\|_{L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]} = \frac{5}{2}(2^{2\pi} - 1)$$

Dessutom är A kompakt operator betraktad som operator $C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ och $L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$. Detta följer av

$$|Au(x_1) - Au(x_2)|^2 \leq \int_0^\pi |a(x_1, y) - a(x_2, y)|^2 dy \|u\|_{L^2[0, \pi]}^2,$$

Arzela-Ascoli sats och inbäddningen $\|u\|_{L^2[0, \pi]} \leq \sqrt{\pi} \|u\|_{C[0, \pi]}$.

2. Beräkna greenfunktionen $g(x, y)$ till differentialoperatorn $Lu = u'' - u$ med randvillkoren $R_1 u = u(0) = 0, R_2 u - u(0) = 0, u_1(x) = e^x, u_2(x) = e^{-x}$ är en bas för $\mathcal{N}(L)$ och ansättningen $\theta(x, t) = a_1(t)u_1(x) + a_2(t)u_2(x)$, där $e(t, t) = 0, e'_x(t, t) = 1$, ger fundamentallösningen $e(x, t) = \sinh(x-t)$. Vi noterar att $g(x, t) = e(x, t)\theta(x-t)$

satisfierar randvillkoren för $t \in (0, 1)$. Alltså ges lösningen till $Lu = f, Ru = (R_1 u, R_2 u) = 0$ av

$$u(x) = \int_0^1 \sinh(x-t)\theta(x-t)f(t)dt = \int_0^x \sinh(x-t)f(t)dt.$$

Definiera nu

$$T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$$

enligt $Tu(x) = -\int_0^x \sinh(x-t)\frac{1}{2}(1+(u(t^2)))dt$, som är en kontinuerlig funktion då integranden $\in C([0,1] \times [0,1])$. T är en kontraktion då

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \sinh(x-t)((u(t^2)) - (v(t^2)))dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \sinh(x-t)dt \|u - v\|_\infty = \frac{1}{2}(\cosh x - 1)\|u - v\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{(e-1)^2}{2e}\|u - v\|_\infty \text{ eftersom } \frac{(e-1)^2}{2e} < 1. \end{aligned}$$

Banachs fixpunktssats ger existens av entydigt bestämd fixpunkt, vilken också är den entydigt bestämd lösningen till differentialekvationsproblemet.

3. Antag att det finns $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att $ST - TS = I$. Detta medför att $TST - T^2S = T = ST^2 - TST$ vilket ger $2T = ST^2 - T^2S$. P.s.s. följer $nT^{n-1} = ST^n - T^nS$ för alla positiva heltal n . Vidare fås då $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ för alla $A, B \in \mathcal{B}(E)$ att

$$n\|T^{n-1}\| \leq \|S\|\|T\|\|T^{n-1}\| + \|T^{n-1}\|\|T\|\|S\| \quad n = 2, 3, \dots$$

Då $\|S\|, \|T\| < \infty$ följer att $\|T^{n-1}\| = 0$ för n tillräckligt stort, dvs $T^{n_0-1} = \mathbf{0} \in \mathcal{B}(E)$ för något positivt heltal.

Men $nT^{n-1} = ST^n - T^nS$ tillämpad på $n = n_0, n_0 - 1, \dots, 2$ ger $T = \mathbf{0}$. Detta motsäger att $ST - TS = I$. Alltså saknas $S, T \in \mathcal{B}(e)$ med egenskapen ovan.

4. & 5. Kursboken...

6. Antag $T \in \mathcal{B}(H)$ normal och $x \in H$. Då gäller

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^T x, x \rangle = \langle TT^* x, x \rangle = \langle T^* x, T^* x \rangle = \|T^* x\|^2$$

och $\|Tx\| = \|T^* x\|$ följer. a) visad.

Av a) följer att $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ för alla normala operator $T \in \mathcal{B}(H)$. Fixera att $\lambda \in \mathbb{C}$. Då är $\lambda I - T$ normal om T är normal ty $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda}I - T^*$ och

$$(\lambda I - T)(\bar{\lambda}I - T^*) = |\lambda|^2 I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + TT^* = \{TT^* = T^*T\} = (\bar{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T).$$

Alltså gäller $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\bar{\lambda}I - T^*)$ dvs b) visad. Alternativt kan man bara "räkna på" från $\|T^* x - \bar{\lambda}x\|^2$.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2000-05-30

Uppgift 1

Givet $Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y) dy$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $C[0, 2\pi]$: Linjäriteten trivial (men bör visas). Begränsningen av A följer av

$$\begin{aligned} |Af(x)| &= \left| \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y) dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \underbrace{|\cos(x-y)|}_{\leq 1} \underbrace{|f(y)|}_{\leq \|f\|_\infty} dy \leq \\ &\leq 2\pi \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

där $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$. Alltså följer

$$\|Af\|_\infty \leq 2\pi \|f\|_\infty,$$

vilket medför $\|A\| \leq 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $L^2[0, 2\pi]$: Linjäriteten trivial som ovan. Begränsningen av A följer av

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |Af(x)|^2 dx &\leq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)||f(y)| dy \right)^2 dx \leq \\ &\leq \{\text{Hölders olikhet}\} \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)|^2 dy \right) \left(\int_0^{2\pi} |f(y)|^2 dy \right) dx \leq 4\pi^2 \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

där $\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2}$. Alltså följer

$$\|Af\|_{L^2} \leq 2\pi \|f\|_{L^2},$$

vilket medför $\|A\| \leq 2\pi$.

$\|A\|_{C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]} = 4$: Vi noterar att

$$\|A\|_{C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]} \leq \int_0^{2\pi} |\cos(x-y)| dy = \int_0^{2\pi} |\cos(y)| dy = 4.$$

För $n = 1, 2, \dots$, låt f_n vara kontinuerliga funktioner på $[0, 2\pi]$ som uppfyller $\|f_n\|_\infty = 1$ och dessutom $= 1$ på intervallen $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \cup [\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{n}, 2\pi]$ och $= -1$ på intervallet $[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ (här kan f_n t.ex. väljas som styckvis linjära funktioner). Då gäller

$$Af_n(0) \leq 4$$

samt

$$Af_n(0) \geq \int_0^{2\pi} |\cos(y)| dy - 2 \cdot \frac{2}{n} = 4 - \frac{4}{n},$$

vilket visar påståendet ovan.

$\|A\|_{L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]} = \pi$: Vi noterar att A är en kompakt självadjungerad operator på Hilbertrummet L^2 , varför $\|A\|_{L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]} = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ egenvärde till } A\}$. Eftersom $Af(x) = a \cos x + b \sin x$, där $a, b \in \mathbb{R}$ beror på f , ges varje egenfunktion på denna form. Liten kalkyl ger att λ är ett egenvärde till A om ekvationssystemet

$$A(a \cos(\cdot) + b \sin(\cdot))(x) = \lambda(a \cos(x) + b \sin(x))$$

i a, b har en icke-trivial lösning, dvs om $\lambda = \pi$.

Uppgift 2

Vi har $f \in C[0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, där $|\lambda| < e(e-1)$, och ska visa att

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktion till $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$:

Antag $e(x, t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t, t) = 0 \\ e'_x(t, t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x, t) = 1 - e^{t-x}$.
Greenfunktionen ges av

$$g(x, t) = \theta(x - t)(1 - e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

Villkoren $g(0, t) = g(1, t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0, 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x, t) = \theta(x - t)(1 - e^{t-x}) + \frac{e^t - e}{e-1} + \frac{e - e^t}{e-1}e^{-x}$. Vi noterar att $g(x, t) \leq 0$ alla x, t .

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = \int_0^1 g(x, t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt, 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0, 1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt.

För $u, v \in C[0, 1]$ gäller

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| \int_0^1 g(x, t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \int_0^1 |g(x, t)| \left| |u(t)| - |v(t)| \right| dt \leq |\lambda| \int_0^1 |g(x, t)| dt \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Sätt $j(x) = \int_0^1 |g(x, t)| dt$. Här är $j(x) = \int_0^1 g(x, t)(-1)dt$, lösningen till $j'' + j' = -1$ med randvillkoren $j(0) = j(1) = 0$. Alltså $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$ med $j_{\max} = j(\ln \frac{e}{e-1}) = \frac{1}{e-1} + \ln(1 - \frac{1}{e}) \leq \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}$.

Härav följer $\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{|\lambda|}{e(e-1)} \|u - v\|_\infty$, och Banach fixpunktssats medför att T har unik fixpunkt om $|\lambda| < e(e-1)$.

Uppgift 3

Givet avbildningen

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \dots, \frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n), \dots).$$

Visa att

- $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ är en begränsad linjär operator
- T ej är surjektiv

Linjäriteten hos T är trivial.

T begränsad operator: Tag $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ och betrakta $\|T\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2$. VLOG kan vi anta att $x_n \geq 0$ för alla n .

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2 &= x_1^2 + \frac{1}{2^2}(x_1 + x_2)^2 + \dots + \frac{1}{n^2}(x_1 + \dots x_n)^2 + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2x_k x_j \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{(j+1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \begin{cases} \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n-1}, & n \geq 2 \\ 2, & n = 1 \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2 &\leq 2\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}x_kx_j\frac{1}{j-1} \leq \\ &\leq 2\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_kx_j}{k+j}. \end{aligned}$$

Dessutom har vi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_kx_j}{k+j} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{k+j}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{j}\right)^{1/4}x_k\right\}\left\{\left(\frac{1}{k+j}\right)^{1/2}\left(\frac{j}{k}\right)^{1/4}x_j\right\} \leq \\ &\leq \{\text{Hölders olikhet}\} \leq \\ &(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}\left(\frac{k}{j}\right)^{1/2}x_k^2)^{1/2}(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}\left(\frac{j}{k}\right)^{1/2}x_j^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Här är

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}\left(\frac{k}{j}\right)^{1/2}x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}\left(\frac{k}{j}\right)^{1/2},$$

där

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}\left(\frac{k}{j}\right)^{1/2} &\leq \int_0^{\infty}\frac{1}{k+x}\left(\frac{k}{x}\right)^{1/2}dx = \{y = \frac{x}{k}\} = \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{1+y}\frac{1}{\sqrt{y}}dy = C, \end{aligned}$$

med C oberoende av k . Följdaktligen gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_kx_j}{k+j} \leq C\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}^2$$

vilket medför att $\|T\mathbf{x}\|_{\ell^2} \leq \sqrt{2+4C}\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}$.

T ej surjektiv: Vi noterar att $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ är injektiv, dvs $T\mathbf{x}_1 = T\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, och begränsad. Om T är surjektiv så ger den inversa avbildningssatsen att T^{-1} är en begränsad linjär avbildning. Sätt

$$\mathbf{y}_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{plats } n}, 0, \dots).$$

Då gäller $\|\mathbf{y}_n\|_{\ell^2} = 1$ och

$$T^{-1}\mathbf{y}_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{n}_{\text{plats } n}, \dots),$$

dvs $\|T\mathbf{y}_n\|_{\ell^2} \geq n$, för alla n . Detta medför $\|T^{-1}\| = \infty$, vilket ger en motsägelse. Alltså T är ej surjektiv. (Alternativt kan man notera att följden

$$\mathbf{y} = (1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, 0, \dots) \in \ell^2$$

medan den enda sekvens \mathbf{x} sådan att $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ges av

$$\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) \notin \ell^2.$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att $Tx_0 = x_0$ för ett $x_0 \in H$. Ska visa att $T^*x_0 = x_0$.

Betrakta

$$\begin{aligned} \|T^*x_0 - x_0\|^2 &= \langle T^*x_0 - x_0, T^*x_0 - x_0 \rangle = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle T^*x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, T^*x_0 \rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle x_0, Tx_0 \rangle - \langle Tx_0, x_0 \rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \|x_0\|^2 \leq (\|T^*\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = \\ &= (\|T\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Alltså gäller $T^*x_0 = x_0$.