



16th May 2007

**TMA401 Functional Analysis**  
**MAN670 Applied Functional Analysis**  
**4th quarter 2006/2007**

# **Gamla tentor från**

## **2000 – dags dato**

**lösningsförslag levereras separat**

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Aron L/Roger A 0762-721860

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2007-01-18

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

1. Show that there exists a unique  $C^2$ -function  $u(x)$  defined on  $[0, 1]$  with  $u(0) = u(1) = 0$  such that

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

2. Show that there exists a function  $f(x)$  defined on  $[0, 1]$  with  $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 1$  such that

$$\int_0^1 f(x)x^{-x} dx = \sup\left\{\int_0^1 g(x)e^{-x} dx : \int_0^1 |g(x)|^2 dx = 1\right\}.$$

Calculate  $f(x)$  and  $\int_0^1 f(x)x^{-x} dx$ .

(4p)

3. Suppose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  whenever  $x \neq y$  and has no fixed points. Show that either

$$f^n(x) \rightarrow +\infty \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ for all } x \in \mathbb{R}$$

or

$$f^n(x) \rightarrow -\infty \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

Here  $f^n$  denotes the composition of  $f$  with itself  $n$  times.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let  $A$  be a bounded linear operator on a Hilbert space  $H$ . Define the adjoint operator  $A^*$ , show that it exists as a bounded linear operator on  $H$  and show that  $\|A^*\| = \|A\|$ .

(4p)

6. Let  $T$  be a linear mapping on a complex inner product space  $E$  such that  $\|Tx\| = \|x\|$  for all  $x \in E$ . Show that  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  for all  $x, y \in E$ .

(4p)

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Oscar Marmon 0762-721860

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2006-09-02

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

1. Show that the family of all solutions of the ODE  $y'' = y$  in the interval  $(0, 1)$  is a subspace of  $C((0, 1))$ . Show that the family of all solutions of  $y'' = y^2$  is not a subspace of  $C((0, 1))$ .

(4p)

2. Show that  $Y = \{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2 : x_{2k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots\}$  is a closed subspace of  $l^2$  and find  $Y^{\perp}$ .

(4p)

3. Consider

$$f(x) + c \int_0^1 (x+t)f(t) dt = g(x) \in C([0, 1]), \quad x \in [0, 1].$$

Assuming  $c^2 + 12c - 12 \neq 0$ , solve the equation.

(4p)

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Show that the adjoint operator of a compact operator is compact.

(4p)

6. Suppose<sup>1</sup>  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  whenever  $x \neq y$ . Show that there exists a  $\xi \in [-\infty, \infty]$  such that for any real  $x$ ,  $f^n(x) \rightarrow \xi$  as  $n \rightarrow \infty$ . Here  $f^n$  denotes the composition of  $f$  with itself  $n$  times.

(4p)

Good Luck!!

PK

<sup>1</sup>Hint: Consider the two cases that  $f$  has a fixed point and that  $f$  has no fixed point respectively.

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Milena Angelova 0762-721860, Peter Kumlin 0739-603800

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2006-05-29

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

1. Consider the complex vector space  $c_0$  of all sequences  $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  such that  $x_n \rightarrow 0$  in  $\mathbb{C}$  as  $n \rightarrow \infty$ . Let  $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$  be the decreasing rearrangement<sup>2</sup> of  $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$ . Define for  $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

$$\|\mathbf{x}\|_* = \sup_{m=1,2,3,\dots} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^m x_n^*$$

and set  $d_0 = \{\mathbf{x} \in c_0 : \|\mathbf{x}\|_* < \infty\}$ . Show that  $\|\cdot\|_*$  is a norm on  $d_0$ .

(4p)

2. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u^2(x^2) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a solution  $u$  with the property  $\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq 1$ . Show that the solution is unique.

(4p)

3. Let  $T$  be the integral operator on the complex Hilbert space  $L^2([-\pi, \pi])$  defined by

$$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x, t)f(t) dt,$$

where  $k(x, t) = (\sin x + \sin t)^2 - \frac{1}{8}$ . Show that  $T$  is self-adjoint and calculate  $\|T\|$ . Find all nonzero eigenvalues and corresponding eigenfunctions for  $T$  and determine  $\sigma(T)$ . Solve the equation

$$Tu = \pi u - \frac{5\pi}{4}$$

in  $L^2([-\pi, \pi])$ .

(4p)

<sup>2</sup>For each positive integer  $n$  we denote by  $x_n^*$  the real number  $x$  that satisfies

$$|\{k : |x_k| > x\}| < n \leq |\{k : |x_k| \geq x\}|.$$

Here  $|A|$  denotes the number of elements in the set  $A$ .

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(4p)

5. Let  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  be a weakly convergent sequence in a Hilbert space  $H$ . Prove that  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  is a bounded sequence in  $H$ .

(5p)

6. Let  $T : H \rightarrow H$  be a compact linear mapping on a Hilbert space  $H$ . Show that

(a)  $\dim \mathcal{N}(I + T) < \infty$

(b)  $\dim \mathcal{N}(I + T^*) = \dim \mathcal{N}(I + T)$

Here  $I$  denotes the identity operator on  $H$  and  $T^*$  the adjoint operator of  $T$ .

(4p)

Good Luck!!  
PK

---

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 3,4,5.

*Telefon:* Marcus Better, 0762-721860

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2006-01-12

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

---

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]). \end{cases}$$

(4p)

2. Set  $H = L^2([0, 1])$ . Let  $T$  be given by

$$Tf(x) = \int_{1-x}^1 f(t) dt.$$

Show that

- (a)  $T$  is a bounded linear operator on  $H$  and
- (b) calculate the kernel  $k(x, t)$  for  $T$  and show that  $T$  is self-adjoint.
- (c) Moreover calculate the kernel  $k_2(x, t)$  for  $T^2$  and
- (d) find<sup>3</sup> all eigenvalues and eigenfunctions for  $T$ .
- (e) Finally calculate  $\|T\|$ .

(8p)

---

<sup>3</sup>Hint: Let  $f$  be an eigenfunction for  $T$  and calculate  $(T^2f)''$ . Show that  $f$  is a solution to the equation  $\lambda^2 f'' + f = 0$ .

3. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

4. Let  $\mathcal{K}(H)$  be the subset of all compact linear operators  $H \rightarrow H$  on a Hilbert space  $H$  in  $\mathcal{B}(H)$  with the operator norm. Show that  $\mathcal{K}(H)$  is a **closed subspace** in  $\mathcal{B}(H)$ .

(4p)

5. For non-negative integers  $k$  let  $C^k(0, 1)$  be the vector space of  $k$  times continuously differentiable functions  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\|f\|_k = \sup_{t \in (0,1)} \sum_{i=0}^k |f^{(i)}(t)| < \infty.$$

Show that  $X_k = (C^k(0, 1), \|\cdot\|_k)$  is a Banach space and that the identity map  $I : X_k \rightarrow X_{k-1}$ ,  $f \mapsto f$ , is a compact operator.

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Johan Jansson, 0762-721860

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2005-08-27

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda \cos(1 + u(x)) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0, u'(0) = 1, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution for  $|\lambda| \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  small. Give an upper bound on  $\epsilon$ .

(4p)

2. Define  $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  by

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x, t)f(t) dt,$$

where

$$k(x, t) = \begin{cases} 1 & x \geq t \\ 0 & x < t \end{cases}.$$

Find  $\sigma(T)$ .

(4p)

3. Let  $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 2, 0, \dots)$  where the numbers 1 and 2 appear in the positions  $n$  and  $n + 1$  and let  $y_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$  with the number 1 in the first  $n$  positions. Consider these as vectors in  $l^2$ . Prove that for all  $n = 1, 2, \dots$

$$y_n \notin \overline{\text{Span}\{x_1, x_2, \dots\}}.$$

(4p)



4. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

5. Show that every weakly convergent sequence in a Hilbert space is bounded.

(4p)

6. Let  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  be a linear functional on a normed space  $E$ . Assume that  $\mathcal{N}(f)$  is closed. Show that  $f$  is bounded.

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Peter Kumlin 031-7723532, 0739-603800

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

*Datum:* 2005-05-25

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* V

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda \cos(1 + u(x)) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution for  $|\lambda| \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  small. Give an upper bound on  $\epsilon$ .

(4p)

2. Let  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  be an ON-basis in a Hilbert space  $H$  and define the operator  $T$  by

$$T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n e_{n-1}.$$

Show that  $T$  is compact and find  $T^*$ . Find<sup>4</sup>  $\sigma_p(T)$  and  $\sigma_p(T^*)$ .

(4p)

3. Let  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$  be linearly independent where  $H$  is a Hilbert space. Show that there exist  $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$  such that

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

for all  $i = 1, 2, \dots, n$ .

(4p)

---

<sup>4</sup> $\sigma_p(A) = \{\lambda : \lambda \text{ eigenvalue to } A\}$ .

4. State and prove the Orthogonal Projection theorem<sup>5</sup>. Also the “Closest Point Property” theorem should be proved.

(5p)

5. Let  $T \in \mathcal{B}(X, X)$  where  $X$  is a Banach space and  $\|T\| < 1$ . Show that  $I + T$  is an invertible operator, i.e.  $(I + T)^{-1} \in \mathcal{B}(X, X)$ .

(4p)

6. Let  $T : H \rightarrow H$  be a linear mapping in a Hilbert space  $H$ . Assume that  $Tx_n \rightarrow Tx$  for every  $x_n \rightarrow x$ . Show that  $T \in \mathcal{B}(H, H)$ .

(4p)

Good Luck!!  
PK

---

<sup>5</sup>Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:*

*Datum:* 2005-01-14

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let  $T$  be a positive compact self-adjoint operator on a Hilbert space  $H$  with  $\|T\| \leq 1$ . Give an upper estimate<sup>6</sup> for

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

3. Let  $k \in L^2([0, \pi] \times [0, \pi])$  and consider the linear mapping

$$T : L^2([0, \pi]) \rightarrow L^2([0, \pi])$$

given by

$$Tf(x) = \int_0^\pi k(x, y)f(y) dy, \quad x \in [0, \pi]$$

for  $f \in L^2([0, \pi])$ . One standard estimate for the operator norm for  $T$  is

$$\|T\| \leq \|k\|_{L^2([0, \pi] \times [0, \pi])}.$$

Prove<sup>7</sup> that also the following estimate is true:

$$\|T\| \leq \left( \sup_x \int_0^\pi |k(x, y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sup_y \int_0^\pi |k(x, y)| dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally apply these two estimates to the kernel function  $k(x, y) = \cos(x - y)$ , i.e. calculate the two upper bounds for the operator norm.

(4p)

<sup>6</sup>Better than the trivial estimate 24

<sup>7</sup>Apply the formula  $\|g\| = \sup_{\|h\|=1} |\langle g, h \rangle|$  to  $Tf$ . Also the estimate  $ab \leq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$  for all  $a, b \in \mathbb{R}$  and  $c > 0$  can come in handy.

4. State and prove Banach's fixed point theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let  $X$  be a finite-dimensional vector space with a norm  $\|\cdot\|$ . Moreover let  $T$  be a linear mapping on  $X$  that is  $1 - 1$ . Show that there exists a  $C > 0$  such that

$$\|Tx\| \geq C\|x\| \quad \text{all } x \in X.$$

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Rolf Liljendahl 073-9979268

*Datum:* 2004-08-28

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} 5u''(x) + \frac{1}{1+u(x)^4} = 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  be an orthonormal basis for a Hilbert space  $H$  and set

$$\begin{cases} f_0 = e_1 \\ f_k = e_{2k+1} & k > 0 \\ f_k = e_{-2k} & k < 0 \end{cases} .$$

Moreover define  $S$  by  $S(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_{k+1}$ . Show that  $S$  is a well-defined bounded linear mapping on  $H$ , calculate  $\|S\|$  and show that  $S$  has no eigenvalues.

(4p)

3. Let  $(e_k)_{k=1}^n$  be a sequence of vectors in a Hilbert space  $H$ . Assume that  $\|e_k\| = 1$  for all  $k$ . Show<sup>8</sup> that

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 (1 + (\sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n |\langle e_k, e_l \rangle|^2)^{\frac{1}{2}})$$

for all  $x \in H$ . Note that if  $(e_k)_{k=1}^n$  is an ON-sequence in  $H$  then the statement is called Bessel's inequality.

(4p)

<sup>8</sup>Hint: Note that  $\sum |\langle x, e_k \rangle|^2 = \langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \rangle$ .

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Let  $P, Q$  be orthogonal projections on a Hilbert space such that  $PQ = QP$ . Show that  $P + Q - PQ$  is an orthogonal projection.

(4p)

6. Let  $T : H \rightarrow H$  be a compact linear operator on a Hilbert space  $H$ . Show that  $\mathcal{R}(I + T)$  is a closed subspace of  $H$ .

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Peter Kumlin 035-52077 eller 0739603800

*Datum:* 2004-05-29

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let  $H = L^2([a, b])$ ,  $a, b$  finite, and

$$Tf(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad x \in [a, b].$$

Show that  $T$  is a bounded linear operator  $H \rightarrow H$  and that  $T$  is a projection.

(4p)

3. Let  $h \in C([0, 1] \times [0, 1])$  be a real-valued function such that

$$h(x, y) = h(y, x) > 0$$

for all  $x, y \in [0, 1]$ . Set

$$Tf(x) = \int_0^1 h(x, y)f(y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

for  $f \in L^2([0, 1])$ . Show that the bounded linear operator  $T$  on  $L^2([0, 1])$  has an eigenvalue  $\lambda = \|T\|$  which is simple.

(4p)



- 
4. State and prove the Orthogonal Projection theorem<sup>9</sup>. Also the “Closest Point Property” theorem should be proved.

(5p)

5. Define the notion of weak convergence on a Hilbert space and show that every weakly convergent sequence is bounded.

(4p)

6. Show that for every compact self-adjoint operator  $T$  on a Hilbert space there exists an eigenvalue  $\lambda$  of  $T$  with  $|\lambda| = \|T\|$ . Also show that there can be no eigenvalue  $\mu$  of  $T$  with  $|\mu| > \|T\|$ .

(4p)

Good Luck!!  
PK

---

<sup>9</sup>Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Karin Kraft 0740-459022

*Datum:* 2004-01-12

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{u(x)}{2 + u^2(x)}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let  $T$  be the linear mapping on  $L^2([0, 1])$  defined by

$$Tf(x) = \int_0^1 (x + y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Show that  $T$  is bounded and calculate  $\|T\|$ .

(4p)

3. Show that the following boundary value problem (almost the same as problem 1)

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \lambda \frac{u(x)}{2 + u^2(x)}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a solution for all  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let  $T$  be a mapping on a real normed space  $X$  satisfying

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \text{ for all } \lambda \in \mathbf{R} \text{ and } x \in X$$

if  $T$  is continuous.

(4p)

6. Let  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  be a complete ON-sequence in a Hilbert space  $H$  and let  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  be another ON-sequence such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

Show that the ON-sequence  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  also is complete.

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Anders Logg 0740-459022

*Datum:* 2003-08-30

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = \lambda \frac{u(x)}{1 + u^2(x)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

has a unique solution for  $|\lambda| < \epsilon$  where  $\epsilon > 0$  is close to 0. Give an estimate on the size of  $\epsilon$ .

(4p)

2. Show that the set  $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ , where  $f_n(x) = x^n$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  and  $n = 1, 2, 3, \dots$ , is linearly independent and use the Gram-Schmidt process (with the Hilbert space  $L^2([-1, 1])$ ) to produce the first three orthogonal vectors, call them  $g_1, g_2, g_3$ , out of  $f_1, f_2, f_3$ .

(4p)

3. Let  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  be an orthonormal sequence in  $L^2([0, 1])$ . Show that the sequence is an orthonormal basis if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x \overline{u_n(t)} dt \right|^2 = x, \quad \text{for all } x \in [0, 1].$$

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let  $H$  be a Hilbert space. Prove or disprove the statement: Every bounded linear mapping on  $H$  preserves orthogonality.

(4p)

6. Let  $X$  be a separable Hilbert space and  $T : X \rightarrow X$  a compact linear operator. Show that  $T$  can be approximated by finite rank operators in  $\mathcal{B}(H)$ , i.e. there exist a sequence of finite rank operators  $T_n$  on  $H$  such that  $T_n \rightarrow T$  in operator norm.

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Axel Målqvist 0740-459022

*Datum:* 2003-05-31

*Skriptid:* fm (5 timmar)

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

(4p)

2. Let  $(e_n)_{n=1}^\infty$  be an ON-basis for a Hilbert space  $H$  and assume that  $T : H \rightarrow H$  is a bounded linear operator on  $H$  such that

$$\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Show that if  $(f_n)_{n=1}^\infty$  is another ON-basis for  $H$  then

$$\sum_{n=1}^\infty \|Tf_n\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2.$$

Moreover show that

$$\|T\|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2.$$

(4p)

3. Set  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ . For  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  define

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

Show that

$$M : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$$

is a bounded linear mapping on  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , calculate the operator norm of  $I - M$  and, finally, determine the adjoint operator of  $M$ . Here  $I$  denotes the identity operator on  $L^2(\mathbb{R}_+)$ .

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let  $\mathcal{K}(H)$  be the subset of all compact linear operators  $H \rightarrow H$  on a Hilbert space  $H$  in  $\mathcal{B}(H)$  with the operator norm. Show that  $\mathcal{K}(H)$  is a closed subspace in  $\mathcal{B}(H)$ .

(4p)

6. Let  $X$  be a Banach space and  $T : X \rightarrow X$  a compact<sup>10</sup> linear operator. Show that there exists a constant  $C$  such that for every  $y \in \mathcal{R}(I+T)$  there exists a  $x \in X$  with  $y = (I+T)x$  such that

$$\|x\| \leq C\|y\|.$$

(4p)

Good Luck!!  
PK

---

<sup>10</sup>Exactly the same definition as for a linear operator on a Hilbert space

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Erik Broman 0740-459022

*Datum:* 2002-08-21

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* VV22

1. Let  $A$  be the linear mapping on  $L^2([0, 1])$  defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)^2 f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Calculate

- (a)  $A^*$   
(b)  $\|A\|$ .

(1+3p)

2. Consider the differential equation

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

- (a) Formulate the boundary value problem as a fixed point problem  $u = Tu$ , where  $T$  is an integral operator.  
(b) Set  $B = \{u \in C([0, 1]) : \|u\|_\infty \leq 1\}$ . Show that  $T$  maps  $B$  into itself provided  $0 < \lambda < \lambda_0$  for  $\lambda_0$  sufficiently small. Give a numerical value on  $\lambda_0$ .  
(c) Show that the differential equation is uniquely solvable in  $B$  with  $\lambda$  chosen as in (b).

(2+1+1p)

3. Let  $T$  be a positive, self-adjoint, compact operator on a Hilbert space  $H$ . Show that

$$\langle Tx, x \rangle^n \leq \langle T^n x, x \rangle \cdot \langle x, x \rangle^{2(n-1)},$$

for all positive integers  $n$  and all  $x \in H$ .

(4p)



4. State and prove Lax-Milgram's theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let  $A$  be a subset of a Hilbert space  $H$ . Show that  $(A^\perp)^\perp$  is the smallest closed subspace of  $H$  that contains  $A$ .

(4p)

Good Luck!!  
PK

---

Matematik, CTH & GU

**Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Peter Kumlin 0739603800 (eller 035 52077)

*(Om telefonen ovan ej fungerar: Jana Madjarova 031 7757763)*

*Datum:* 2002-06-01

*Skriptid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* maskin

---

1. Let  $A$  be the linear mapping on  $L^2([0, 1])$  defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x - y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Calculate

- (a)  $A^*A$   
(b)  $\|A\|$ .

(2+2p)

2. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1 + u^2(x)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

(4p)

3. Let  $T : X \rightarrow X$  be a mapping (not necessary linear) on a normed space  $X$ . Moreover assume that there are real constants  $C, \alpha$ , where  $\alpha > 1$ , such that

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha, \quad \text{for all } x, y \in X.$$

Show that there exists a  $z \in X$  such that  $T(x) = z$  for all  $x \in X$ .

(4p)

4. State and prove Hilbert-Schmidt's theorem.

(5p)

5. Let  $A$  be a bounded operator on a Hilbert space  $H$ . Define the adjoint operator  $A^*$  (also prove that it exists) and show that  $A^*$  is a bounded operator on  $H$  with  $\|A\| = \|A^*\|$ .

(4p)

6. Let  $T$  be a self-adjoint operator on a Hilbert space  $H$ . Assume that  $T^n$  is compact for some integer  $n \geq 2$ . Prove that  $T$  is compact.

(4p)

Good Luck!!  
PK

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Peter Kumlin 772 3532 (alternativt 0739603800)

*Datum:* 2002-01-26

*Skrivtid:* fm (5 timmar)

*Lokal:* maskin

1. Låt  $H$  vara ett oändligtdimensionellt Hilbertrum och  $T : H \rightarrow \mathbf{C}$  en begränsad linjär funktional  $\neq 0$ . Beräkna dimensionen för det linjära delrummet  $\mathcal{N}(T)^\perp$  av  $H$ . Ge också ett exempel på ett Hilbertrum  $H$  och en funktional  $T$  som ovan.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $u(x)$  definierad på intervallet  $[0, 1]$  sådan att  $u(0) = u(1) = 0$  och

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt  $T$  vara en självadjunderad, positiv, kompakt operator på ett Hilbertrum  $H$  med  $\|T\| \leq 1$ . Ge en uppskattning<sup>11</sup> av

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

4. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

5. Låt  $T$  vara en begränsad linjär operator på ett Banachrum  $X$ . Definiera  $\sigma(T)$ . Låt  $\sigma_a(T)$  beteckna det approximativa spektrumet för  $T$ , dvs mängden av alla komplexa tal  $\lambda$  för vilka det finns en följd  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  i  $X$  med  $\|x_n\| = 1$  så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Visa att  $\sigma_a(T)$  är en delmängd av  $\sigma(T)$ .

(4p)

6. Givet en tät delmängd  $S$  i ett Banachrum  $X$ . Låt vidare  $\{T_n\}_{n=1}^\infty$  vara en följd av linjära operatorer på  $X$ . Antag att

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  existerar för alla  $x \in S$  och att

(b) det finns ett  $C > 0$  så att

$$\|T_n x\| \leq C \|x\|$$

för alla  $n$  och alla  $x \in X$ .

Visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  existerar för alla  $x \in X$ .

<sup>11</sup>En uppskattning bättre än den triviala

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\| \leq 3\|T\|^4 + 20\|T\|^3 + \|T\|^2 \leq 24.$$

(4p)

Motivera väl!  
Lycka till!!  
PK

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Robert Berman 0740-459022

*Datum:* 2001-08-29

*Skriptid:* em (5 timmar)

*Lokal:*

1. Låt  $l^2$  beteckna Banachrummet av alla sekvenser  $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  med elementvis addition och multiplikation med skalär och med den vanliga normen  $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$ . För varje  $\mathbf{x} \in l^2$  definiera

$$(T\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_{n+1} + 2x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k, k \in \mathbf{Z} \\ 2x_{n+1} + x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k + 1, k \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

Avgör om  $T$  är

- (a) en begränsad linjär operator på  $l^2$
- (b) självdjungerad
- (c) en inverterbar operator<sup>12</sup>.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $u(x)$  definierad på intervallet  $[0, 1]$  sådan att

$$u(0) - 2u(1) = u'(0) - 2u'(1) = 0$$

och

$$4u''(x) - |u(x) + x| = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt  $T$  vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum  $H$  med  $\dim \mathcal{R}(T) = 1$ . Visa att för alla  $y \in \mathcal{R}(T)$ ,  $y \neq 0$ , finns entydigt bestämda  $x \in H$  så att

$$Tz = \langle z, x \rangle y, \quad z \in H.$$

Visa också att

$$\|T\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Använd t.ex. detta faktum för att beräkna operatornormen för avbildningen

$$Tf(t) = \int_0^1 e^{t-s} f(s) ds, \quad f \in L^2[0, 1].$$

(4p)

4. Formulera<sup>13</sup> och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

<sup>12</sup>dvs  $T^{-1} \in \mathcal{B}(l^2)$ .

<sup>13</sup>Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

(5p)

6. Givet ett slutet äkta delrum  $F$  i ett normerat rum  $E$ . Visa att det för varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $x \in E$  sådant att  $\|x\| = 1$  och  $\|x - y\| > 1 - \epsilon$  för alla  $y \in F$ . Använd t.ex. detta för att visa varje normerat rum  $X$  där den slutna enhetsbollen  $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  i  $X$  är kompakt är ändligtdimensionellt.

(4p)

Motivera väl!

Lycka till!!

PK

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:*

*Datum:* 2001-05-30

*Skriptid:* 8.45 – 13.45 (5 timmar)

*Lokal:* VV

1. Sätt

$$Au(x) = \int_0^\pi e^{x+y} \cos(x+y)u(y) dy, \quad x \in [0, \pi].$$

Beräkna operatornormen för  $A$  och avgör om  $A$  är en kompakt operator då  $A$  betraktas som en operator på

(a) Banachrummet  $C[0, \pi]$ ,

(b) Banachrummet  $L^2[0, \pi]$ .

(2p+2p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $u(x)$  definierad på intervallet  $[0, 1]$  sådan att  $u(0) = u'(0) = 0$  och

$$u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt  $E$  vara ett normerat rum. Visa att det inte kan finnas avbildningar  $S, T \in \mathcal{B}(E)$  sådana att

$$ST - TS = I,$$

där  $I$  betecknar identitetsoperatoren på  $E$ .

(4p)



4. Formulera<sup>14</sup> och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa<sup>15</sup> spektralsatsen för självdjungeade kompakta operatorer på Hilbertrum.

(5p)

6. Låt  $T$  vara en normal linjär avbildning på ett Hilbertrum  $H$ , dvs  $T$  är en begränsad operator sådan att  $T$  kommuterar med sin adjunkt  $T^*$ , eller i klartext

$$TT^* = T^*T.$$

Visa att

- (a)  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  för alla  $x \in H$ ;  
(b)  $\lambda$  är ett egenvärde med egenvektor  $x$  till  $T$  om och endast om  $\bar{\lambda}$  egenvärde med egenvektor  $x$  till  $T^*$ .

(1p+3p)

Motivera väl!  
Lycka till!!  
PK

<sup>14</sup>Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

<sup>15</sup>Beviset ska inkludera bevis av den sats som kallas för Hilbert-Schmidts sats i kursboken.

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* .....

*Datum:* 2001-02-17

*Skriptid:* 8.45 – 13.45 (5 timmar)

*Lokal:* Maskinhuset

1. För  $u \in C[0, 1]$  sätt

$$(Au)(x) = \int_0^{1-x} |x-y|u(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Visa att  $A$  är en begränsad linjär operator på Banachrummet  $C[0, 1]$  samt beräkna operatornormen  $\|A\|$ .

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $u(x)$  definierad i intervallet  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sådan att  $u'(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0$  och

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{2} \sin u(x^2), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Beräkna här först Greenfunktionen och formulera sedan om differentialekvationen som en integralekvation. Bestäm slutligen funktionen  $u(x)$ .

(4p)

3. Antag att  $H$  är ett Hilbertrum. Använd spektralsatsen för att finna en  $H$ -värd lösning  $u(t)$  till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases}$$

där  $A$  är en kompakt, självadjungerad, positivt definit operator på  $H$ . Visa att

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad t \geq 0.$$

(4p)

4. (a) Låt  $A$  vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum  $H$ . Visa att  $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$ .

(b) Definiera vad som menas med att en följd i ett Hilbertrum konvergerar svagt. Ge exempel på en följd som konvergerar svagt men ej starkt.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt  $H$  vara ett komplext Hilbertrum och  $A$  en begränsad linjär operator på  $H$  med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla  $x \in H$ . Visa att  $A$  är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!  
Lycka till!!  
PK

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Niklas Lindholm, 0740-350646

*Datum:* 2000-08-22

*Skrivtid:* 8.45 – 13.45 (5 timmar)

*Lokal:* VV

1. Låt  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en begränsad följd, dvs  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ . Visa genom att använda Banachs kontraktionssats<sup>16</sup> att det finns en begränsad följd  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  som löser

$$x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

där  $x_0 = 1$ .

(4p)

2. Beräkna normen av operatoren  $A : C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$  given av

$$(Af)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y) dy.$$

Beräkna också normen av operatoren  $B : L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$  given av

$$(Bf)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y) dy.$$

Funktionerna är komplexvärda.

(4p)

3. Låt  $T$  vara definierad för  $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  enligt

$$(T\mathbf{x})_n = nx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Visa att  $D(T) = \{\mathbf{x} \in l^2 : T\mathbf{x} \in l^2\}$  är en tät delmängd i  $l^2$  och att  $T$  är en sluten operator<sup>17</sup> i  $l^2$ , dvs att  $\mathbf{x}_n \in l^2$  för  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$  i  $l^2$ ,  $T\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{z}$  i  $l^2$  medför att  $\mathbf{y} \in D(T)$  och  $T\mathbf{y} = \mathbf{z}$ .

(4p)

4. Låt  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  vara kontinuerliga funktioner på intervallet  $I = [0, 1]$ , där  $n$  är ett heltal  $\geq 2$ . Låt vidare  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  för  $i = 0, \dots, n-1$  och  $j = 1, \dots, n$  vara komplexa tal och sätt

$$R_j u = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{ij} u^{(i)}(0) + \beta_{ij} u^{(i)}(1)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Vidare sätt

$$Lu = u^{(n)} + c_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + c_1 u^{(1)} + c_0 u$$

och

$$Ru = (R_1 u, \dots, R_n u).$$

Ge tillräckliga villkor för att det för varje  $f \in C(I)$  ska finnas en unik lösning  $u \in C^n(I)$  till problemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}.$$

Redogör dessutom för hur man beräknar  $u$ , dvs beskriv hur man bestämmer Greenfunktionen till randvärdesproblemet.

<sup>16</sup>Betrakta avbildningen

$$x_n \mapsto \frac{1}{4}(a_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

<sup>17</sup>Utnyttja t.ex. att  $T$  är en självadjungerad operator.

(4p)

5. Formulera och bevisa "Orthogonal decomposition theorem".

(5p)

6. Låt  $H$  vara ett komplext Hilbertrum och  $A$  en begränsad linjär operator på  $H$  med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla  $x \in H$ . Visa att  $A$  är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!

Lycka till!!

PK

Matematik, CTH

**Extra Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:*

*Datum:* 2000-06-06

*Skriptid:* em (5 timmar)

*Lokal:*

1. Beräkna normen av operatoren  $A : C[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$  given av

$$(Af)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)})f(y) dy.$$

Beräkna också normen av operatoren  $B : L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$  given av

$$(Bf)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)})f(y) dy.$$

(4p)

2. Antag att  $f \in C([0, 1])$  och  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning om  $|\lambda|$  är tillräckligt litet.

(4p)

3. Antag att  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  är en linjär avbildning sådan att  $Tf \geq 0$  om  $f \geq 0$ . Visa att  $T$  är en begränsad operator.

(4p)

4. Definiera vad som menas med (ortogonal) projektionsoperator, att en operator är idempotent, samt visa följande påstående:

Antag att  $A$  är en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum  $H$ . Visa att  $A$  är en (ortogonal) projektionsoperator på  $H$  om och endast om  $A$  är idempotent och självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt  $H$  vara ett komplext Hilbertrum och  $A$  en begränsad linjär operator på  $H$  med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla  $x \in H$ . Visa att  $A$  är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!

Lycka till!!

PK

Matematik, CTH

**Tentamen i Funktionalanalys TMA400**

*Hjälpmedel:* Inga (inte ens räknedosa).

*Personuppgifter:* Namn, personnummer, linje, antagningsår.

*Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!*

*Teoriuppgifter:* 4,5,6.

*Telefon:* Peter Kumlin 772 3532

*Datum:* 2000-05-30

*Skriptid:* 8.45 – 13.45 (5 timmar)

*Lokal:* Gamla M-huset

1. Betrakta integraloperatorm

$$Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Visa att  $A$  definierar en begränsad linjär operator på de två Banachrummen (reella funktioner)

(a)  $C[0, 2\pi]$

(b)  $L^2[0, 2\pi]$ .

Beräkna operatornormen  $\|A\|$  i något av fallen.

(4p)

2. Antag att  $f \in C([0, 1])$  och  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0, 1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning för  $|\lambda|$  litet.

(4p)

3. Betrakta avbildningen

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \dots, \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \dots).$$

Visa att detta är en begränsad linjär operator på  $l^2$  som ej är surjektiv.

(4p)

- 
4. Låt  $A : H \rightarrow H$  vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum  $H$ . Definiera  $A^*$  och visa att den är en väldefinierad begränsad linjär operator på  $H$  och att  $\|A^*\| = \|A\|$ . Visa slutligen att om  $A_n \rightarrow A$  i  $\mathcal{B}(H, H)$  då  $n \rightarrow \infty$  och om alla  $A_n$  är självadjungerade så är också  $A$  självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

6. Låt  $T$  vara en linjär begränsad operator på ett Hilbertrum  $H$  med  $\|T\| = 1$ . Antag att det finns ett  $x_0 \in H$  så att  $Tx_0 = x_0$ . Visa att då gäller att  $T^*x_0 = x_0$ .

(4p)

Motivera väl!  
Lycka till!!  
PK