TMA401/MMA400 Functional Analysis 2007/2008
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Gamla tentor från

2000 – dags dato

lösningsförslag levereras separat

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
*Telefon:*Magnus G 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–09–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Set $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ and $f_3(x) = x^2$. Find an ON-sequence $(g_n)_{n=1}^3$ such that
$$\text{Span}\{f_n : n = 1, 2, 3\} = \text{Span}\{g_n : n = 1, 2, 3\}$$
in the Hilbert space of realvalued funtions on $[0.1]$ with the inner product
$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^1 h_1(x) h_2(x) x \, dx.$$
(4p)

2. Show that the boundary value problem
$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \sin u(x) = \cos x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$
has a unique solution $u \in C^2$.

(4p)

3. Let X be a Banach space and let $T : X \to X$ be a mapping with the following property: There exist real numbers $\alpha > 1$ and $C > 0$ such that
$$\|T(x) - T(y)\| \le C\|x - y\|^\alpha$$
for all $x, y \in X$. Show that there exists a $x_0 \in X$ such that $T(x) = x_0$ for all $x \in X$.

(4p)

4. Give the definition of compact operator on a Hilbert space and show that every compact operator is bounded.

(4p)

5. Give the definition of strong and weak convergence of a sequence on a Hilbert space H. Show that strong convergence implies weak convergence. Give an example of a weakly convergent sequence on a Hilbert space that does not converge strongly (including a proof of the statement).

(5p)

6. Assume that $T : X \to X$ is a mapping on a Banach space X and that there exist real numbers c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ satisfying $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ such that

$$\|T^n x - T^n y\| \leq c_n \|x - y\|$$

for all positive integers n and all $x, y \in X$. Show that the sequence $(T^n z)_{n=1}^{\infty}$ converges for every $z \in X$ and that the limit is a fixed point for T and that the fixed point is unique.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Elisabeth Wulcan 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–06–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Set
$$Tf(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in [0, 2\pi].$$
Show that T is a bounded linear and compact operator when T is considered as an operator on
   (a) the Banach space $C([0, 2\pi])$,
   (b) the Banach space $L^2([0, 2\pi])$.

(4p)

2. Show that the boundary value problem
$$\begin{cases} u''(x) + \lambda \sin u(x^2) = u(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$
has a unique solution $u \in C^2$ for $|\lambda|$ small enough. Give an estimate $\lambda_0 > 0$ such that the problem has a unique solution for all $|\lambda| < \lambda_0$.

(4p)

3. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON basis for a Hilbert space H. For each n set $f_n = e_{n+1} - e_n$. Show that $\text{span}\{f_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ is dense in H.

(4p)

4. State and prove (a version of) Banach's contraction fixed point theorem.

(4p)

5. Let A be a bounded linear operator $H \to H$ where H is a Hilbert space. Define the adjoint operator A^* and show that it is a well-defined bounded linear mapping on H with $\|A^*\| = \|A\|$.

(5p)

6. We say that an inner product space $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ has the Riesz property if every bounded linear functional f on E is given by $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ for some $x_0 \in E$. Riesz representation theorem implies that every Hilbert space E has the Riesz property. Show that every inner product space with the Riesz property must be a Hilbert space.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Aron L/Roger A 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–01–18
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that there exists a unique C^2-function $u(x)$ defined on $[0,1]$ with $u(0) = u(1) = 0$ such that
$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \; x \in [0,1].$$
(4p)

2. Show that there exists a function $f(x)$ defined on $[0,1]$ with $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = 1$ such that
$$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = \sup\{\int_0^1 g(x)e^{-x}\,dx : \int_0^1 |g(x)|^2\,dx = 1\}.$$
Calculate $f(x)$ and $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$.
(4p)

3. Suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ whenever $x \neq y$ and has no fixed points. Show that either
$$f^n(x) \to +\infty \text{ as } n \to \infty \text{ for all } x \in \mathbb{R}$$
or
$$f^n(x) \to -\infty \text{ as } n \to \infty \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$
Here f^n denotes the composition of f with itself n times.
(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.
(5p)

5. Let A be a bounded linear operator on a Hilbert space H. Define the adjoint operator A^*, show that it exists as a bounded linear operator on H and show that $\|A^*\| = \|A\|$.

(4p)

6. Let T be a linear mapping on a complex inner product space E such that $\|Tx\| = \|x\|$ for all $x \in E$. Show that $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ for all $x, y \in E$.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Oscar Marmon 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–09–02
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the family of all solutions of the ODE $y'' = y$ in the interval $(0,1)$ is a subspace of $C((0,1))$. Show that the family of all solutions of $y'' = y^2$ is not a subspace of $C((0,1))$.

(4p)

2. Show that $Y = \{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2 : x_{2k} = 0, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ is a closed subspace of l^2 and find $Y^{\perp}$.

(4p)

3. Consider

$$f(x) + c\int_0^1 (x+t)f(t)\,dt = g(x) \in C([0,1]), \quad x \in [0,1].$$

Assuming $c^2 + 12c - 12 \neq 0$, solve the equation.

(4p)

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Show that the adjoint operator of a compact operator is compact.

(4p)

6. Suppose[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ whenever $x \neq y$. Show that there exists a $\xi \in [-\infty, \infty]$ such that for any real x, $f^n(x) \to \xi$ as $n \to \infty$. Here f^n denotes the composition of f with itself n times.

[1] Hint: Consider the the two cases that f has a fixed point and that f has no fixed point respectively.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Milena Angelova 0762-721860, Peter Kumlin 0739-603800
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–05–29
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Consider the complex vector space c_0 of all sequences $\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n \to 0$ in $\mathbb{C}$ as $n \to \infty$. Let $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ be the decreasing rearrangement[2] of $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$. Define for $\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

$$\|\mathbb{x}\|_* = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \frac{1}{\sqrt{m}} \Sigma_{n=1}^{m} x_n^*$$

and set $d_0 = \{\mathbb{x} \in c_0 : \|\mathbb{x}\|_* < \infty\}$. Show that $\|\cdot\|_*$ is a norm on d_0.

(4p)

2. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u^2(x^2) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a solution u with the property $\max_{0 \le x \le 1} |u(x)| \le 1$. Show that the solution is unique.

(4p)

3. Let T be the integral operator on the complex Hilbert space $L^2([-\pi, \pi])$ defined by

$$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x,t) f(t)\, dt,$$

[2] For each positive integer n we denote by x_n^* the real number x that satisfies

$$|\{k : |x_k| > x\}| < n \le |\{k : |x_k| \ge x\}|.$$

Here $|A|$ denotes the number of elements in the set A.

where $k(x,t) = (\sin x + \sin t)^2 - \frac{1}{8}$. Show that T is self-adjoint and calculate $\|T\|$. Find all nonzero eigenvalues and corresponding eigenfunctions for T and determine $\sigma(T)$. Solve the equation

$$Tu = \pi u - \frac{5\pi}{4}$$

in $L^2([-\pi,\pi])$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(4p)

5. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a weakly convergent sequence in a Hilbert space H. Prove that $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is a bounded sequence in H.

(5p)

6. Let $T : H \to H$ be a compact linear mapping on a Hilbert space H. Show that

   (a) $\dim \mathcal{N}(I+T) < \infty$

   (b) $\dim \mathcal{N}(I+T^*) = \dim \mathcal{N}(I+T)$

   Here I denotes the identity operator on H and T^* the adjoint operator of T.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 3,4,5.
Telefon: Marcus Better, 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–01–12
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]). \end{cases}$$

(4p)

2. Set $H = L^2([0,1])$. Let T be given by

$$Tf(x) = \int_{1-x}^{1} f(t)\,dt.$$

Show that

(a) T is a bounded linear operator on H and

(b) calculate the kernel $k(x,t)$ for T and show that T is self-adjoint.

(c) Moreover calculate the kernel $k_2(x,t)$ for T^2 and

(d) find[3] all eigenvalues and eigenfunctions for T.

(e) Finally calculate $\|T\|$.

(8p)

[3]Hint: Let f be an eigenfunction for T and calculate $(T^2 f)''$. Show that f is a solution to the equation $\lambda^2 f'' + f = 0$.

3. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

4. Let $\mathcal{K}(H)$ be the subset of all compact linear operators $H \to H$ on a Hilbert space H in $\mathcal{B}(H)$ with the operator norm. Show that $\mathcal{K}(H)$ is a **closed subspace** in $\mathcal{B}(H)$.

(4p)

5. For non-negative integers k let $C^k(0,1)$ be the vector space of k times continuously differentiable functions $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ such that

$$\|f\|_k = \sup_{t\in(0,1)} \Sigma_{l=0}^{k} |f^{(l)}(t)| < \infty.$$

Show that $X_k = (C^k(0,1), \|\cdot\|_k)$ is a Banach space and that the identity map $I : X_k \to X_{k-1}$, $f \mapsto f$, is a compact operator.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Johan Jansson, 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2005–08–27
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda\cos(1+u(x)) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0)=0,\ u'(0)=1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| \le \epsilon$, ϵ small. Give an upper bound on ϵ .

(4p)

2. Define $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ by

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt,$$

where

$$k(x,t) = \begin{cases} 1 & x \ge t \\ 0 & x < t \end{cases} .$$

Find $\sigma(T)$.

(4p)

3. Let $x_n = (0,0,\ldots,0,1,2,0,\ldots)$ where the numbers 1 and 2 appear in the positions n and $n+1$ and let $y_n = (1,1,\ldots,1,0,0,\ldots)$ with the number 1 in the first n positions. Consider these as vectors in l^2. Prove that for all $n = 1,2,\ldots$

$$y_n \notin \overline{\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \ldots\}}.$$

(4p)

4. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

5. Show that every weakly convergent sequence in a Hilbert space is bounded.

(4p)

6. Let $f : E \to \mathbb{C}$ be a linear functional on a normed space E. Assume that $\mathcal{N}(f)$ is closed. Show that f is bounded.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 031-7723532, 0739-603800
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2005–05–25
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda\cos(1+u(x)) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| \le \epsilon$, ϵ small. Give an upper bound on ϵ .

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis in a Hilbert space H and define the operator T by

$$T(\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n e_{n-1}.$$

Show that T is compact and find T^*. Find[4] $\sigma_p(T)$ and $\sigma_p(T^*)$.

(4p)

3. Let $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$ be linearly independent where H is a Hilbert space. Show that there exist $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ such that

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

(4p)

[4] $\sigma_p(A) = \{\lambda : \lambda \text{ eigenvalue to } A\}$.

4. State and prove the Orthogonal Projection theorem[5]. Also the “Closest Point Property” theorem should be proved.

(5p)

5. Let $T \in \mathcal{B}(X, X)$ where X is a Banach space and $\|T\| < 1$. Show that $I + T$ is an invertible operator, i.e. $(I + T)^{-1} \in \mathcal{B}(X, X)$.

(4p)

6. Let $T : H \to H$ be a linear mapping in a Hilbert space H. Assume that $Tx_n \rightharpoonup Tx$ for every $x_n \to x$. Show that $T \in \mathcal{B}(H, H)$.

(4p)

Good Luck!!
PK

[5]Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2005–01–14
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let T be a positive compact self-adjoint operator on a Hilbert space H with $\|T\| \le 1$. Give an upper estimate[6] for

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

3. Let $k \in L^2([0,\pi] \times [0,\pi])$ and consider the linear mapping

$$T : L^2([0,\pi]) \to L^2([0,\pi])$$

given by

$$Tf(x) = \int_0^\pi k(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in [0,\pi]$$

for $f \in L^2([0,\pi])$. One standard estimate for the operator norm for T is

$$\|T\| \le \|k\|_{L^2([0,\pi]\times[0,\pi])}.$$

Prove[7] that also the following estimate is true:

$$\|T\| \le (\sup_x \int_0^\pi |k(x,y)|\, dy)^{\frac{1}{2}} (\sup_y \int_0^\pi |k(x,y)|\, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally apply these two estimates to the kernel function $k(x,y) = \cos(x-y)$, i.e. calculate the two upper bounds for the operator norm.

(4p)

---

[6]Better than the trivial estimate 24

[7]Apply the formula $\|g\| = \sup_{\|h\|=1} |\langle g, h\rangle|$ to Tf. Also the estimate $ab \le \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$ for all $a, b \in \mathbb{R}$ and $c > 0$ can come in handy.

4. State and prove Banach's fixed point theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let X be a finite-dimensional vector space with a norm $\|\cdot\|$. Moreover let T be a linear mapping on X that is $1-1$. Show that there exists a $C>0$ such that

$$\|Tx\| \geq C\|x\| \quad \text{all} \;\; x \in X.$$

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Rolf Liljendahl 073-9979268

Datum: 2004–08–28
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} 5u''(x) + \dfrac{1}{1+u(x)^4} = 1, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an orthonormal basis for a Hilbert space H and set

$$\begin{cases} f_0 = e_1 \\ f_k = e_{2k+1} & k > 0 \\ f_k = e_{-2k} & k < 0 \end{cases}.$$

Moreover define S by $S(\Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_k) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_{k+1}$. Show that S is a well-defined bounded linear mapping on H, calculate $\|S\|$ and show that S has no eigenvalues.

(4p)

3. Let $(e_k)_{k=1}^{n}$ be a sequence of vectors in a Hilbert space H. Assume that $\|e_k\| = 1$ for all k. Show[8] that

$$\Sigma_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 (1 + (\Sigma_{\substack{k,l=1 \\ k\ne l}}^{n} |\langle e_k, e_l\rangle|^2)^{\frac{1}{2}})$$

for all $x \in H$. Note that if $(e_k)_{k=1}^{n}$ is an ON-sequence in H then the statement is called Bessel's inequality.

(4p)

[8]Hint: Note that $\Sigma|\langle x, e_k\rangle|^2 = \langle x, \Sigma\langle x, e_k\rangle e_k\rangle$.

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Let P, Q be orthogonal projections on a Hilbert space such that $PQ = QP$. Show that $P + Q - PQ$ is an orthogonal projection.

(4p)

6. Let $T : H \to H$ be a compact linear operator on a Hilbert space H. Show that $\mathcal{R}(I + T)$ is a closed subspace of H.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 035-52077 eller 0739603800

Datum: 2004–05–29
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let $H = L^2([a,b])$, a, b finite, and

$$Tf(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx, \quad x \in [a,b].$$

Show that T is a bounded linear operator $H \to H$ and that T is a projection.

(4p)

3. Let $h \in C([0,1] \times [0,1])$ be a real-valued function such that

$$h(x,y) = h(y,x) > 0$$

for all $x, y \in [0,1]$. Set

$$Tf(x) = \int_0^1 h(x,y) f(y)\,dy, \quad x \in [0,1]$$

for $f \in L^2([0,1])$. Show that the bounded linear operator T on $L^2([0,1])$ has an eigenvalue $\lambda = \|T\|$ which is simple.

(4p)

4. State and prove the Orthogonal Projection theorem[9]. Also the "Closest Point Property" theorem should be proved.

(5p)

5. Define the notion of weak convergence on a Hilbert space and show that every weakly convergent sequence is bounded.

(4p)

6. Show that for every compact self-adjoint operator T on a Hilbert space there exists an eigenvalue λ of T with $|\lambda| = \|T\|$. Also show that there can be no eigenvalue μ of T with $|\mu| > \|T\|$.

(4p)

Good Luck!!
PK

[9]Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Karin Kraft 0740-459022

Datum: 2004–01–12
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \dfrac{u(x)}{2+u^2(x)}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let T be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Tf(x) = \int_0^1 (x+y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Show that T is bounded and calculate $\|T\|$.

(4p)

3. Show that the following boundary value problem (almost the same as problem 1)

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \lambda\dfrac{u(x)}{2+u^2(x)}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a solution for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let T be a mapping on a real normed space X satisfying

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \text{ for all } \lambda \in \mathbf{R} \text{ and } x \in X$$

if T is continuous.

(4p)

6. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a complete ON-sequence in a Hilbert space H and let $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ be another ON-sequence such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

Show that the ON-sequence $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ also is complete.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Anders Logg 0740-459022

Datum: 2003–08–30
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = \lambda \dfrac{u(x)}{1+u^2(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| < \epsilon$ where $\epsilon > 0$ is close to 0. Give an estimate on the size of ϵ.

(4p)

2. Show that the set $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$, where $f_n(x) = x^n$, $-1 \leq x \leq 1$ and $n = 1, 2, 3. \ldots$, is linearly independent and use the Gram-Schmidt process (with the Hilbert space $L^2([-1,1])$) to produce the first three orthogonal vectors, call them g_1, g_2, g_3, out of f_1, f_2, f_3.

(4p)

3. Let $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ be an othonormal sequence in $L^2([0,1])$. Show that the sequence is an orthonormal basis if

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x \overline{u_n(t)}\, dt \right|^2 = x, \quad \text{for all } x \in [0,1].$$

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let H be a Hilbert space. Prove or disprove the statement: Every bounded linear mapping on H preserves orthogonality.

(4p)

6. Let X be a separable Hilbert space and $T : X \to X$ a compact linear operator. Show that T can be approximated by finite rank operators in $\mathcal{B}(H)$, i.e. there exist a sequence of finite rank operators T_n on H such that $T_n \to T$ in operator norm.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Axel Målqvist 0740-459022

Datum: 2003–05–31
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis for a Hilbert space H and assume that $T : H \to H$ is a bounded linear operator on H such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Show that if $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is another ON-basis for H then

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

Moreover show that

$$\|T\|^2 \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

(4p)

3. Set $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. For $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ define

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Show that

$$M : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$$

is a bounded linear mapping on $L^2(\mathbb{R}_+)$, calculate the operator norm of $I - M$ and, finally, determine the adjoint operator of M. Here I denotes the identity operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let $\mathcal{K}(H)$ be the subset of all compact linear operators $H \to H$ on a Hilbert space H in $\mathcal{B}(H)$ with the operator norm. Show that $\mathcal{K}(H)$ is a closed subspace in $\mathcal{B}(H)$.

(4p)

6. Let X be a Banach space and $T : X \to X$ a compact[10] linear operator. Show that there exists a constant C such that for every $y \in \mathcal{R}(I + T)$ there exists a $x \in X$ with $y = (I + T)x$ such that

$$\|x\| \leq C\|y\|.$$

(4p)

Good Luck!!
PK

[10] Exactly the same definition as for a linear operator on a Hilbert space

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Erik Broman 0740-459022

Datum: 2002–08–21
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: VV22

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)^2 f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Calculate

(a) A^*
(b) $\|A\|$.

(1+3p)

2. Consider the differential equation

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Formulate the boundary value problem as a fixed point problem $u = Tu$, where T is an integral operator.
(b) Set $B = \{u \in C([0,1]) : \|u\|_\infty \le 1\}$. Show that T maps B into itself provided $0 < \lambda < \lambda_0$ for λ_0 sufficiently small. Give a numerical value on λ_0.
(c) Show that the differential equation is uniquely solvable in B with λ chosen as in (b).

(2+1+1p)

3. Let T be a positive, self-adjoint, compact operator on a Hilbert space H. Show that

$$\langle Tx, x\rangle^n \le \langle T^n x, x\rangle \cdot \langle x, x\rangle^{2(n-1)},$$

for all positive integers n and all $x \in H$.

(4p)

4. State and prove Lax-Milgram's theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let A be a subset of a Hilbert space H. Show that $(A^{\perp})^{\perp}$ is the smallest closed subspace of H that contains A.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU

Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Peter Kumlin 0739603800 (eller 035 52077)

(*Om telefonen ovan ej fungerar:* Jana Madjarova 031 7757763)

Datum: 2002–06–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Calculate

(a) A^*A

(b) $\|A\|$.

(2+2p)

2. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

3. Let $T : X \to X$ be a mapping (not necessary linear) on a normed space X. Moreover assume that there are real constants C, α, where $\alpha > 1$, such that

$$\|T(x) - T(y)\| \le C\|x-y\|^\alpha, \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that there exists a $z \in X$ such that $T(x) = z$ for all $x \in X$.

(4p)

4. State and prove Hilbert-Schmidt's theorem.

(5p)

5. Let A be a bounded operator on a Hilbert space H. Define the adjoint operator A^* (also prove that it exists) and show that A^* is a bounded operator on H with $\|A\| = \|A^*\|$.

(4p)

6. Let T be a self-adjoint operator on a Hilbert space H. Assume that T^n is compact for some integer $n \geq 2$. Prove that T is compact.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 772 3532 (alternativt 0739603800)

Datum: 2002–01–26
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Låt H vara ett oändligtdimensionellt Hilbertrum och $T : H \to \mathbf{C}$ en begränsad linjär funktional $\neq 0$. Beräkna dimensionen för det linjära delrummet $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ av H. Ge också ett exempel på ett Hilbertrum H och en funktional T som ovan.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att $u(0) = u(1) = 0$ och

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt T vara en självadjungerad, positiv, kompakt operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| \leq 1$. Ge en uppskattning[11] av

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

4. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

5. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Banachrum X. Definiera $\sigma(T)$. Låt $\sigma_a(T)$ beteckna det approximativa spektrumet för T, dvs mängden av alla komplexa tal λ för vilka det finns en följder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i X med $\|x_n\| = 1$ så att

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Visa att $\sigma_a(T)$ är en delmängd av $\sigma(T)$.

[11] En uppskattning bättre än den triviala

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\| \leq 3\|T\|^4 + 20\|T\|^3 + \|T\|^2 \leq 24.$$

(4p)

6. Givet en tät delmängd S i ett Banachrum X. Låt vidare $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av linjära operatorer på X. Antag att

   (a) $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in S$ och att

   (b) det finns ett $C > 0$ så att

   $$\|T_n x\| \leq C\|x\|$$

   för alla n och alla $x \in X$.

   Visa att $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in X$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Robert Berman 0740-459022

Datum: 2001–08–29
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal:

---

1. Låt l^2 beteckna Banachrummet av alla sekvenser $(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ med elementvis addition och multiplikation med skalär och med den vanliga normen $\|\mathbf{x}\|^2 = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$. För varje $\mathbf{x} \in l^2$ definiera

$$(T\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_{n+1} + 2x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k, k \in \mathbf{Z} \\ 2x_{n+1} + x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k+1, k \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Avgör om T är

(a) en begränsad linjär operator på l^2

(b) självadjungerad

(c) en inverterbar operator[12].

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att

$$u(0) - 2u(1) = u'(0) - 2u'(1) = 0$$

och

$$4u''(x) - |u(x) + x| = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\dim \mathcal{R}(T) = 1$. Visa att för alla $y \in \mathcal{R}(T)$, $y \neq 0$, finns entydigt bestämda $x \in H$ så att

$$Tz = \langle z, x \rangle y, \quad z \in H.$$

Visa också att

$$\|T\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Använd t.ex. detta faktum för att beräkna operatornormen för avbildningen

$$Tf(t) = \int_0^1 e^{t-s} f(s)\, ds, \qquad f \in L^2[0, 1].$$

[12] dvs $T^{-1} \in \mathcal{B}(l^2)$.

(4p)

4. Formulera[13] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Givet ett slutet äkta delrum F i ett normerat rum E. Visa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $x \in E$ sådant att $\|x\| = 1$ och $\|x - y\| > 1 - \epsilon$ för alla $y \in F$. Använd t.ex. detta för att visa varje normerat rum X där den slutna enhetsbollen $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ i X är kompakt är ändligtdimensionellt.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[13] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon:

Datum: 2001–05–30

Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)

Lokal: VV

---

1. Sätt

$$Au(x) = \int_0^\pi e^{x+y} \cos(x+y) u(y)\, dy, \qquad x \in [0, \pi].$$

Beräkna operatornormen för A och avgör om A är en kompakt operator då A betraktas som en operator på

(a) Banachrummet $C[0, \pi]$,

(b) Banachrummet $L^2[0, \pi]$.

(2p+2p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att $u(0) = u'(0) = 0$ och

$$u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt E vara ett normerat rum. Visa att det inte kan finnas avbildningar $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att

$$ST - TS = I,$$

där I betecknar identitetsoperatorn på E.

(4p)

4. Formulera[14] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa[15] spektralsatsen för självadjungerade kompakta operatorer på Hilbertrum.

(5p)

6. Låt T vara en normal linjär avbildning på ett Hilbertrum H, dvs T är en begränsad operator sådan att T kommuterar med sin adjunkt T^*, eller i klartext

$$TT^* = T^*T.$$

Visa att

(a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ för alla $x \in H$;

(b) λ är ett egenvärde med egenvektor x till T om och endast om $\overline{\lambda}$ egenvärde med egenvektor x till T^*.

(1p+3p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[14] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.
[15] Beviset ska inkludera bevis av den sats som kallas för Hilbert-Schmidts sats i kursboken.

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: ....

Datum: 2001–02–17
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Maskinhuset

---

1. För $u \in C[0,1]$ sätt

$$(Au)(x) = \int_0^{1-x} |x-y| u(y)\, dy, \quad x \in [0,1].$$

Visa att A är en begränsad linjär operator på Banachrummet $C[0,1]$ samt beräkna operatornormen $\|A\|$.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ sådan att $u'(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0$ och

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{2} \sin u(x^2), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Beräkna här först Greenfunktionen och formulera sedan om differentialekvationen som en integralekvation. Bestäm slutligen funktionen $u(x)$.

(4p)

3. Antag att H är ett Hilbertrum. Använd spektralsatsen för att finna en H-värd lösning $u(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases}$$

där A är en kompakt, självadjungerad, positivt definit operator på H. Visa att

$$\|u(t)\| \le \|u_0\|, \quad t \ge 0.$$

(4p)

4. (a) Låt A vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.
   (b) Definiera vad som menas med att en följd i ett Hilbertrum konvergerar svagt. Ge exempel på en följd som konvergerar svagt men ej starkt.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Niklas Lindholm, 0740-350646

Datum: 2000–08–22
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: VV

---

1. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd, dvs $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. Visa genom att använda Banachs kontraktionssats[16] att det finns en begränsad följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ som löser
$$x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$
där $x_0 = 1$.

(4p)

2. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av
$$(Af)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av
$$(Bf)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
Funktionerna är komplexvärda.

(4p)

3. Låt T vara definierad för $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ enligt
$$(T\mathbf{x})_n = nx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$
Visa att $D(T) = \{\mathbf{x} \in l^2 : T\mathbf{x} \in l^2\}$ är en tät delmängd i l^2 och att T är en sluten operator[17] i l^2, dvs att $\mathbf{x}_n \in l^2$ för $n = 1, 2, \dots$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$ i l^2, $T\mathbf{x}_n \to \mathbf{z}$ i l^2 medför att $\mathbf{y} \in D(T)$ och $T\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

---

[16] Betrakta avbildningen
$$x_n \mapsto \frac{1}{4}(a_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \quad n = 1, 2 \dots.$$

[17] Utnyttja t.ex. att T är en självadjungerad operator.

(4p)

4. Låt $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ vara kontinuerliga funktioner på intervallet $I = [0,1]$, där n är ett heltal ≥ 2. Låt vidare α_{ij}, β_{ij} för $i = 0, \dots, n-1$ och $j = 1, \dots, n$ vara komplexa tal och sätt

$$R_j u = \Sigma_{i=0}^{n-1}(\alpha_{ij} u^{(i)}(0) + \beta_{ij} u^{(i)}(1)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Vidare sätt

$$Lu = u^{(n)} + c_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + c_1 u^{(1)} + c_0 u$$

och

$$Ru = (R_1 u, \dots, R_n u).$$

Ge tillräckliga villkor för att det för varje $f \in C(I)$ ska finnas en unik lösning $u \in C^n(I)$ till problemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}.$$

Redogör dessutom för hur man beräknar u, dvs beskriv hur man bestämmer Greenfunktionen till randvärdesproblemet.

(4p)

5. Formulera och bevisa ”Orthogonal decomposition theorem”.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Extra Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2000–06–06
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal:

---

1. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av
$$(Af)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av
$$(Bf)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen
$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda |u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$
har en entydigt bestämd lösning om $|\lambda|$ är tillräckligt litet.

(4p)

3. Antag att $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ är en linjär avbildning sådan att $Tf \geq 0$ om $f \geq 0$. Visa att T är en begränsad operator.

(4p)

4. Definiera vad som menas med (ortogonal) projektionsoperator, att en operator är idempotent, samt visa följande påstående:

Antag att A är en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att A är en (ortogonal) projektionsoperator på H om och endast om A är idempotent och självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 772 3532

Datum: 2000–05–30
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Gamla M-huset

---

1. Betrakta integraloperatorn

$$Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\, dy, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Visa att A definierar en begränsad linjär operator på de två Banachrummen (reella funktioner)

(a) $C[0, 2\pi]$

(b) $L^2[0, 2\pi]$.

Beräkna operatornormen $\|A\|$ i något av fallen.

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning för $|\lambda|$ litet.

(4p)

3. Betrakta avbildningen

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \dots, \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots x_n), \dots).$$

Visa att detta är en begränsad linjär operator på l^2 som ej är surjektiv.

(4p)

4. Låt $A : H \to H$ vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Definiera A^* och visa att den är en väldefinierad begränsad linjär operator på H och att $\|A^*\| = \|A\|$. Visa slutligen att om $A_n \to A$ i $\mathcal{B}(H, H)$ då $n \to \infty$ och om alla A_n är självadjungerade så är också A självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

6. Låt T vara en linjär begränsad operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att det finns ett $x_0 \in H$ så att $Tx_0 = x_0$. Visa att då gäller att $T^*x_0 = x_0$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK