MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Functional Analysis, TMA401/MMA400, 2007-10-24 (8.30-13.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jonas Hartwig, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt (bonuspoäng inkluderade).

---

1. Prove uniqueness and existence of a solution to the following BVP:

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda \arctan(u(x^2)) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

   Here λ is a real number with $|\lambda| \leq 1$ and all functions are real-valued. What can you say if λ is an arbitrary real number?

   (4p)

2. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-sequence in a Hilbert space H and let $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of complex numbers. Define T by

$$T(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n \langle x, x_n \rangle x_n, \ x \in H.$$

   Give necessary and sufficient conditions on $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ for T to be a well-defined bounded linear operator on H. Moreover give necessary and sufficient conditions on $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ for T to be a compact operator on H. Prove your statements.

   (4p)

3. For $n = 1, 2, 3, \ldots$ let $T_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ be defined by

$$(T_n f)(x) = f(x^{1+\frac{1}{n}}), \ x \in [0,1],$$

   where $C([0,1])$ is equipped with the max-norm. Prove that

   (a) $T_n f \to f$ in $C([0,1])$ as $n \to \infty$, and
   (b) $\|T_n - I\| = 2$ for all n. Here I denotes the identity operator on $C([0,1])$.

   (4p)

4. (a) State and prove Riesz representation theorem.

(b) Show by an example that “Hilbert space” cannot be replaced by “inner product space” in the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let I denote the identity operator.

   (a) Let X be a Banach space and let $T \in \mathcal{B}(X, X)$ with $\|T\| < 1$. Show that $(I+T)^{-1}$ exists as a bounded linear operator on X.

   (b) Let H be a Hilbert space and assume that $S \in \mathcal{B}(H, H)$ satisfies $\langle S(x), x\rangle \geq 0$ for all $x \in H$. Show that $(I+S)^{-1}$ exists as a bounded linear operator on H.

(4p)

6. Let H be a Hilbert space and let $T \in \mathcal{B}(H, H)$. Assume that $T \neq 0$ and $T^2 = T$. Prove that the following statements are equivalent:

   (a) T is an orthogonal projection

   (b) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$

   (c) $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ for all $x \in H$.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter