

Något kring

Generaliserade Funktioner
och
Fouriertransformen

Kompendium

av
J Bergh

Göteborg
1994

Förord

Detta kompendium är avsett att kortfattat ersätta bl.a. matematiskt sett mindre bra delar (t.ex. kapitel 5) av boken BRACEWELL R., *The Fourier Transform and Its Applications*, second edition, revised, McGraw-Hill, 1986.

Vi går till en del utöver boken: de resultat som uppkallats efter Paley-Wiener och Bochner-Schwartz har vi tagit med t.ex. liksom en del teori för generaliserade funktioner: *distributionsteori*.

Vi nämner två böcker för vidare studier av distributioner.

Folland G. B., *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks, 1992

Hörmander L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators part I*, second edition, Springer-Verlag, 1990

Den första boken är förhållandevis lättläst. Den andra innehåller en fullständigare redovisning. Båda finns i institutionens bibliotek, liksom ett flertal andra böcker i ämnet som vi inte nämner här.

Vår disposition är som följer. Vi inleder med klassen \mathcal{S} av obegränsat deriverbara funktioner som avtar snabbt för stora värden på variabeln. Fourier-transformen är en isomorfi på \mathcal{S} . Sedan diskuterar vi dualen till \mathcal{S} , \mathcal{S}' , som är generaliserade funktioner och kallas tempererade distributioner. Som tillämpningar av begreppet Tempererad Distribution ger vi relativt okomplicerade bevis av Poisson's Summationsformel, Samplingsatsen, en fourierseries konvergens och Centrala Gränsvärdesatsen. Vi beskriver också egenskaper hos funktionen då fouriertransformen är noll utanför ett intervall (Paley-Wiener) samt sambandet mellan autokorrelationsfunktioner och sannolikhetsmått (Bochner-Schwartz). Vi behandlar kortfattat Radontransformen (datortomografi) samt antenner och tunna linser. Därefter kommer några frågor kring övergången mellan en kontinuerlig signal och dess ändliga diskreta motsvarighet som kan behandlas i dator.

Som avslutning skisserar vi idén bakom *wavelet-transformen* – en variant av fourier-transformen som används allt mer i olika tekniska sammanhang.

I huvudsak följer vi kursbokens beteckningar. Dock har alla resultat versioner i mer än 1 dimension, och bevisen i dimension 2 och högre kräver inga ytterligare idéer utöver dem som vi ger för dimension 1.

På många ställen i texten förekommer uppmaningar, t.ex. "verifiera!". Detta innebär att bevisdetaljer utelämnats. Avsikten med de luckorna är framför allt att göra det lättare att se idéerna; delvis fylls de under kursens gång.

Innehåll

1	Generaliserade Funktioner	1
1.1	Funktionsklassen \mathcal{S}	1
1.2	Klassen \mathcal{S}'	4
1.3	Tillämpningar av teorin	11
2	Analytisk Fortsättning	17
2.1	Paley & Wiener	17
2.2	Sambandet mellan laplace- & fouriertransformen	18
2.3	Spektralfaktorisering	20
3	Litet Sannolikhetsteori	21
3.1	Centrala Gränsvärdesatsen	21
3.2	Autokorrelationsfunktioner	21
4	Valda nedslag	25
4.1	Osäkerhetsrelationen	25
4.2	Gibbs' Fenomen	26
4.3	Radontransformen	26
4.4	Antenner och tunna linser	29
	Antenner	29
	En tunn konvex lins	29
4.5	Diskretiseringsfrågor	32
	Sampling och fouriertransformering	32
	Olika faltningar	33
	Flink Fourier-Transform: FFT	33
5	Wavelet-analys	35
5.1	Wavelets	36
5.2	Algoritmerna	38
5.3	En skala av underrum	41
A	Appendix	43
	Index	46

1 Generaliserade Funktioner

Vi skall utvidga funktionsbegreppet, och då också uppfatta en funktion f som värdena av

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

då φ genomlöper en klass av *testfunktioner*. Notera att detta inte är detsamma som det ursprungliga sättet (exempelvis via grafen) att uppfatta en funktion.

Avsnittet börjar med testfunktionerna, vilka utgör klassen \mathcal{S} .

Sedan behandlar vi de *tempererade distributionerna*, \mathcal{S}' , en utvidgning av funktionsbegreppet, som förenklar räknandet med bl.a. samplade signaler.¹

Vi avslutar med att tillämpa teorin genom att bevisa Samplingsatsen, Poisson's Summationsformel. Vi diskuterar också sambandet mellan fouriertransformer och fourierserier.

När kommer distributioner mer konkret till användning?

Matematisk teknik används för att underlätta manipulerande av de modeller som 'verkligheten' mer eller mindre passar i. Från signalanalys kommer här två exempel där distributionerna är till hjälp. (Många tillämpningar finns i teori för differentialekvationer; se Exempel 2 i avsnitt 2.2 nedan.)

1. Vi söker en signal om vilken vi känner de 'glidande medelvärdena' (eller kanske de glidande medelvärdena av dessa). Precist, vi söker lösningen till ekvationen $1_{(-1/2,1/2)} * f = g$ ($1_{(-1/2,1/2)} * 1_{(-1/2,1/2)} * f = h$).
2. Betrakta en lågpas-filtrerad signal, d.v.s. signalen saknar frekvensinnehåll ovanför 'Nyquistfrekvensen'. Kan dess maxima (minima) ligga obegränsat nära varandra, eller finns ett minsta avstånd som bestäms av nyquistfrekvensen?

1.1 Funktionsklassen \mathcal{S}

Definition 1.1.1 Klassen \mathcal{S} består av komplexvärda funktioner f av en reell variabel som är obegränsat deriverbara och som uppfyller

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

för varje val av icke-negativa heltal α, β .

Med andra ord: *funktionen och alla dess derivator avtar snabbare än varje $1/(\text{polynom})$ då variabeln går mot oändligheten.*

¹Distributionsteorin utvecklades som hjälp vid studiet av (linjära) differentialekvationer och deras lösningar.

EXEMPEL 1 Låt $f(x) = e^{-ax^2}$ med $a > 0$. Då gäller $f \in \mathcal{S}$, vilket verifieras direkt ur definitionen, liksom att inga polynom tillhör \mathcal{S} .

EXEMPEL 2 Verifiera också att $f \in \mathcal{S}$ då f ges av (rita figur!)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ e^{-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2}} & (a < x < b) \\ 0 & (b \leq x) \end{cases}$$

EXEMPEL 3 Låt f vara som i föregående exempel, med $a = -b$ och normaliserad till integralen 1. Låt g vara integrerbar.² Definiera ($\varepsilon > 0$)

$$g_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) g(y) dy$$

Faltningen $g_\varepsilon \in \mathcal{S}$ och $g_\varepsilon(x) \rightarrow g(x)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) nästan överallt (verifiera!).

Definition 1.1.2 **Fouriertransformen** av en funktion f i \mathcal{S} betecknar vi \hat{f} eller $\mathcal{F}f$. Den ges av

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s x} f(x) dx$$

De egenskaper som gör klassen \mathcal{S} lämplig för fouriertransformation finns i följande

Lemma 1.1.1 Låt $f \in \mathcal{S}$. Då gäller med icke-negativa heltal α, β

1. $g(x) = x^\alpha D^\beta f(x) \Rightarrow g \in \mathcal{S}$

“ \mathcal{S} är sluten under derivation och under multiplikation med polynom”

2. $\hat{f} \in \mathcal{S}$

“ \mathcal{S} är sluten under fouriertransformation”

Bevis: För att visa den sista egenskapen, räcker det att observera följande två likheter (verifiera detta!). För det första, ger derivation under integraltecknet

$$D\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s x} (-2\pi i x) f(x) dx$$

Operationen är tillåten eftersom integralen efter derivation är absolut och likformigt konvergent. Därmed har vi $\sup_s |D^\beta \hat{f}(s)| < \infty$ för varje $\beta \geq 0$. För det andra, har vi med partiell integration

$$2\pi i s \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s x} Df(x) dx$$

² Lebesgue-integrerbar exempelvis. Om detta begrepp är obekant, läs “kontinuerlig och riemann-integrerbar” samt “överallt”.

vilket ger $\sup_s |s^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$ för varje $\alpha \geq 0$.

Verifiera den första egenskapen!

□

EXEMPEL 4 Sätt $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Då gäller $\hat{f} = f$. Vi verifierar detta:

$$\begin{aligned} D\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s x} (-2\pi i x) e^{-\pi x^2} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s x} Df(x) dx \\ &= -2\pi s \hat{f}(s) \end{aligned}$$

vilket ger $\hat{f}(s) = e^{-\pi s^2}$ eftersom $\hat{f}(0) = \int f(x) dx = 1$.

Vi skall nu visa det centrala resultatet: Man kan återskapa en funktion i \mathcal{S} från kännedom om dess fouriertransform.

Sats 1.1 (Fourier's Inversionsformel) Låt $f \in \mathcal{S}$. Då gäller

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s x} \hat{f}(s) ds$$

ANMÄRKNING 1 1. Formeln gäller i distributionsmening under svagare förutsättningar, t.ex. för $f \in L^2$ (kvadratisk integrerbar). Jfr Sats 1.3 nedan.

2. Formeln kan skrivas $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$, vilket betyder att efter 4 successiva fouriertransformationer har man återfått den ursprungliga funktionen.

Vi skriver $\check{f}(x) := f(-x)$, d.v.s. $\mathcal{F}^2 f(x) = \check{f}(x)$.

3. Lemma 1.1.1 och Sats 1.1 ger att fouriertransformen är en isomorfi på \mathcal{S} . (Isomorfin omfattar också topologin; se beviset av Proposition 1.2.2 nedan.)

Bevis: Det räcker att betrakta fallet $x = 0$ (verifiera!).

Anta först att $f(0) = 0$. Vi skall då visa att $\int \hat{f}(s) ds = 0$. Sätt $g(x) = f(x)/x$ och det följer att $g \in \mathcal{S}$ (verifiera!). Vidare har vi $-2\pi i \hat{f}(s) = D\hat{g}(s)$ och alltså

$$-2\pi i \int \hat{f}(s) ds = \int D\hat{g}(s) ds = 0$$

vilket visar satsen i fallet $f(0) = 0$.

Om $f(0) \neq 0$, skriv

$$f(x) = f(x) - f(0)e^{-\pi x^2} + f(0)e^{-\pi x^2}$$

Vi fouriertransformerar, integrerar, använder det vi just visat och får

$$\int \hat{f}(s) ds = f(0)$$

ty inversionsformeln gäller för $e^{-\pi x^2}$ enligt Exempel 4 ovan. Beviset är klart. □

ANMÄRKNING 2 Beviset utnyttjar en ofta använd teknik: Man delar beviset i två steg. Först visar man påståendet för $f \in \mathcal{S}$ med $f(0) = 0$, d.v.s. för ett underrum av \mathcal{S} . Sedan delar man upp en allmän funktion $f \in \mathcal{S}$ i en summa. Den ena termen ligger i underrummet och den andras (ej i underrummet) uppförande är känt, vilket då ger påståendet i dess helhet.

1.2 Klassen \mathcal{S}'

Vi skall nu beskriva en generalisering av begreppet *funktion*, kallad *tempererad distribution*,³ som möjliggör en sammanhållen behandling av idéer som *punktmassa*, *punktladdning*, *puls*, *stöt*, *dipolmoment* m.fl.

Testfunktioner kommer att betecknas med grekiska bokstäver, t.ex. φ , i fortsättningen, medan distributioner skrivs kursivt med versaler, t.ex. T . De komplexa talen betecknar vi \mathbf{C} (alltså med fet bokstav). Vidare inför vi beteckningen (φ_1, φ_2 i \mathcal{S})

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx$$

Notera att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ är en skalärprodukt endast för reellvärda funktioner.

Definition 1.2.1 *En linjär avbildning*

$$T : \mathcal{S} \ni \varphi \longrightarrow T(\varphi) \in \mathbf{C}$$

kallas en **tempererad distribution** om för varje följd av testfunktioner $\varphi_n \in \mathcal{S}$ med egenskapen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi_n(x)| = 0$$

för varje par av icke-negativa heltal α, β , gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0$$

Klassen av tempererade distributioner skrivs \mathcal{S}' ; vidare skriver vi ofta $T(\varphi) =: \langle T, \varphi \rangle$; i Exempel 5 nedan framgår skälet till detta. En följd av testfunktioner med gränsvärdet ovan sägs *gå mot 0 i \mathcal{S}* .

Ett exempel på en sådan följd är $\varphi_n(x) = e^{-x^2}/n$ med $n = 1, 2, \dots$. Verifiera att $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} .

Verifiera också att *en tempererad distribution är bestämd av sina värden för reellvärda testfunktioner*.

³Adjektivet "tempererad" betecknar här "måttligt växande". Se Exempel 8 nedan.

EXEMPEL 5 Låt $f(x)/(1+x^2)^\alpha$ vara absolut-integrerbar för något α och sätt

$$T : \mathcal{S} \ni \varphi \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx \in \mathbf{C}$$

Vi verifierar att avbildningen T är en tempererad distribution, varvid linjariteten är uppenbar.

Ta en svit $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} . Då får vi

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)/(1+x^2)^\alpha| dx \sup_x |(1+x^2)^\alpha \varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

vilket avslutar verifikationen. Notera att f får vara t.ex. ett polynom.

Distributionen T i Exempel 5 identifieras med funktionen f . Detta är något som de flesta finner svårt till en början.

Funktionen f uppfattas alltså här inte som värdena $f(x)$ då x varierar utan som värdena $\langle f, \varphi \rangle$ då φ varierar över \mathcal{S} . Vi skriver $T = f$ i \mathcal{S}' .

Verifiera att, om f och g är kontinuerliga funktioner med $f = g$ i \mathcal{S}' , eller, ekvivalent, $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$, så gäller $f(x) = g(x)$ för alla x .

I nästa exempel behandlar vi en ofta förekommande tempererad distribution, nämligen δ -distributionen.⁴

EXEMPEL 6 Betrakta avbildningen

$$T : \mathcal{S} \ni \varphi \longrightarrow \varphi(0) \in \mathbf{C}$$

Verifiera att T är en tempererad distribution p.s.s. som i Exempel 5.

ANMÄRKNING 3 Vi avråder från att använda (de oegentliga) beteckningarna "delta-funktionen", " $\delta(x)$ ", " $\int \delta(x)\varphi(x) dx$ " m.fl. Dessa suggererar den felaktiga föreställningen att distributionen δ är en funktion i gängse mening, vilket gör det inledande umgänget onödigt vanskligt.

EXEMPEL 7 Sätt $f_n(x) = n^{1/2}e^{-n\pi x^2}$ med $n = 1, 2, \dots$. Verifiera att, $f_n \in \mathcal{S}'$ och

$$f_n(\varphi) \rightarrow \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Detta kan skrivas $f_n \rightarrow \delta$ i \mathcal{S}' . Man kan alltså säga att f_n approximerar δ .

EXEMPEL 8 Kontinuerliga funktioner som inte är tempererade distributioner är sådana som växer starkt i oändligheten, t.ex. e^x . Tag $\varphi(x) = e^{-(1+x^2)^{1/2}}$. Man ser nu genast att $\langle e^{(\cdot)}, \varphi \rangle$ divergerar, varför $e^{(\cdot)}$ inte ligger i \mathcal{S}' .⁵

⁴Beteckningen kommer från namnet P A M Dirac.

⁵Beteckningar av typen $e^{(\cdot)}$, d.v.s. med variabeln undertryckt, används för att minska riskerna för missförstånd, särskilt längre fram vid multiplikation av en tempererad distribution med en funktion.

EXEMPEL 9 Den i signalbehandling mest använda tempererade distributionen är pulståget $\sum_n \delta_n$, där $\delta_n(\varphi) = \varphi(n)$, d.v.s. δ translaterat till heltalet n .⁶

Verifiera att pulståget, som svarar mot avbildningen

$$T : \mathcal{S} \ni \varphi \longrightarrow \sum_n \varphi(n) \in \mathbf{C}$$

är en tempererad distribution. (Notera att $\langle \sum_n \delta_n, \varphi \rangle := \sum_n \varphi(n)$.)

Operationerna *derivation*, *multiplikation med funktion*, *translation* m.fl. på tempererade distributioner måste definieras så att de blir de vanliga operationerna om den tempererade distributionen är en funktion. T.ex. om $f \in \mathcal{S}$ och $\varphi \in \mathcal{S}$ så

$$\langle Df, \varphi \rangle = \int Df(x)\varphi(x) dx = - \int f(x)D\varphi(x) dx = - \langle f, D\varphi \rangle$$

De andra definitionerna nedan motiveras på liknande sätt.

Translation betecknas $f_\tau(x) := f(x - \tau)$, τ reellt (ibland dock index!). Multiplikation med en funktion g definieras under det svagaste kravet på g för vilket implikationen $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow g\varphi \in \mathcal{S}$ är sann.

Definition 1.2.2 Låt $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ och anta att g är en obegränsat deriverbar funktion med egenskapen att, givet $\beta \geq 0$ finns α så att $\sup_x (1 + |x|)^\alpha |D^\beta g(x)| < \infty$.

$$\begin{aligned} \langle DT, \varphi \rangle &:= - \langle T, D\varphi \rangle \\ \langle gT, \varphi \rangle &:= \langle T, g\varphi \rangle \\ \langle T_\tau, \varphi \rangle &:= \langle T, \varphi_{-\tau} \rangle \end{aligned}$$

Polynom duger alltså som g , men inte e^x t.ex. De definierade objekten skall vara tempererade distributioner, vilket är innehållet i följande

Proposition 1.2.1 För $T \in \mathcal{S}'$ och med g som i Definition 1.2.2 gäller $DT \in \mathcal{S}'$, $gT \in \mathcal{S}'$ och $T_\tau \in \mathcal{S}'$.

Bevis: Vi visar påståendet om gT , och lämnar de andra som övning.

Linjariteten är uppenbar. Ta nu en svit $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} ,

$$\langle gT, \varphi_n \rangle = \langle T, g\varphi_n \rangle$$

Men, givet α, β , får vi

$$\sup_x (1 + |x|)^\alpha |D^\beta (g(x)\varphi_n(x))| \leq C \sum_{\nu \leq \beta} \sup_x (1 + |x|)^\alpha |D^\nu \varphi_n(x)|$$

vilket ger $\langle gT, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$, och därmed följer $gT \in \mathcal{S}'$. □

⁶Kursbokens beteckning med den ryska bokstaven III, "shah", är svårhanterlig bl.a. vid koordinatbyten, varför vi inte kommer att använda den. Se Anmärkning 7 nedan.

Proposition 1.2.1 kan formuleras: *Klassen \mathcal{S}' är sluten under derivation, under multiplikation med glatta funktioner som inte växer snabbt i oändligheten samt under translation.*

Notera att polynom uppfyller villkoren för g i Proposition 1.2.1.

För dem som känner osäkerhet inför tempererade distributioner ger vi nu en struktursats. Den innebär att *varje tempererad distribution kan skrivas som en summa av derivator av kontinuerliga funktioner.* Exemplet som följer satsen illustrerar resultatet.

Sats 1.2 (Struktursatsen) *Låt $T \in \mathcal{S}'$. Då finns kontinuerliga funktioner f_j , $j = 1, 2, \dots$, och icke-negativa heltal β_j så att (i \mathcal{S}')*

$$T = \sum_j D^{\beta_j} f_j$$

Bevis: Se appendix. □

EXEMPEL 10 För $f(x) = x_+$, rampfunktionen, och Heaviside-funktionen (stegfunktionen) H gäller att $D^2 f = DH = \delta$ i \mathcal{S}' . Vi verifierar detta ($\varphi \in \mathcal{S}$)

$$\begin{aligned} \langle D^2 f, \varphi \rangle &= \langle f, D^2 \varphi \rangle \\ &= \int_0^\infty x D^2 \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^\infty D \varphi(x) dx (= \langle DH, \varphi \rangle) \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

EXEMPEL 11 Låt f vara funktionen $f(x) = -x^{-3/2}H(x)/2$, där H åter är Heaviside-funktionen. Definiera

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{1}{2} \int_\epsilon^\infty x^{-3/2} \varphi(x) dx + \epsilon^{-1/2} \varphi(0) \right\}$$

T kallas *ändliga delen* av f .

Verifiera att den kontinuerliga funktionen $g = 2(\cdot)^{1/2}H \in \mathcal{S}'$ och att $Dg = (\cdot)^{-1/2}H$ samt $D^2g = T$ i \mathcal{S}' ! Detta motiverar definitionen av T . Extratermerna i definitionen av ändliga delen av en funktion kommer från McLaurinutvecklingen av testfunktionen $\varphi(x)$.

Det är nu dags att definiera fouriertransformen av en tempererad distribution. Motiveringen ges av *Plancherel's Formel* ($f \in \mathcal{S}$, $\varphi \in \mathcal{S}$)

$$\int \mathcal{F}f(x)\varphi(x) dx = \int f(x)\mathcal{F}\varphi(x) dx$$

Formeln fås direkt genom byte av integrationsordning. Notera specialfallet $\varphi = (\hat{f})^*$, som kallas *Parseval's Formel*:⁷

$$\int |\hat{f}(s)|^2 ds = \int |f(x)|^2 dx$$

Definition 1.2.3 Ta $T \in \mathcal{S}'$. **Fouriertransformen** av T , $\hat{T} = \mathcal{F}T$, ges av

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Proposition 1.2.2 Om $T \in \mathcal{S}'$ så följer $\hat{T} \in \mathcal{S}'$.

Bevis: Linjariteten är uppenbar. Ta nu testfunktioner $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} och

$$\langle \hat{T}, \varphi_n \rangle = \langle T, \hat{\varphi}_n \rangle$$

Gäller nu att $\hat{\varphi}_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} , så är vi klara. Vi har dels

$$\sup_s |D\hat{\varphi}_n(s)| \leq C \int |x\varphi_n(x)| dx$$

och dels

$$\sup_s |s\hat{\varphi}_n(s)| \leq C \int |D\varphi_n(x)| dx$$

Men för t.ex. den första integranden gäller

$$|x\varphi_n(x)| \leq (1+x^2)^{-1} \sup_x (1+x^2)^2 |\varphi_n(x)|$$

Ett likartat resonemang för den sista integranden ger $\hat{\varphi}_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} , och beviset är klart. (Verifiera den sista uppskattningen!) □

EXEMPEL 12 Man ser genast att ($\beta \geq 0$)

$$\mathcal{F}D^\beta \delta = (2\pi i(\cdot))^\beta$$

$$\mathcal{F}(-2\pi i(\cdot))^\beta = D^\beta \delta$$

Vi verifierar den första för $\beta = 0$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(0) = \int \varphi(x) dx$$

och lämnar resten som övning.

⁷Den kallas Rayleigh's Sats i kursboken, men ingen annanstans, oss veterligt.

Det centrala resultatet är Fourier's Inversionsformel, där \check{T} definieras av

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

Verifiera att $\check{T} \in \mathcal{S}'$.

Sats 1.3 (Fourier's Inversionsformel) Låt $T \in \mathcal{S}'$. Då gäller $\mathcal{F}\mathcal{F}T = \check{T}$.

Bevis: För $\varphi \in \mathcal{S}$ har vi enligt Sats 1.1

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^2 T, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle T, \check{\varphi} \rangle \\ &= \langle \check{T}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Beviset är klart. □

Fouriervarianten av Proposition 1.2.1, som behandlar derivation, translation och multiplikation med vissa funktioner kommer nu. Minns motsvarande lagar för funktioner i \mathcal{S} !

Proposition 1.2.3 *Fouriertransformen är linjär. Låt $T \in \mathcal{S}'$, och anta att S är en obegränsat deriverbar funktion, sådan att, givet $\beta \geq 0$, finns α så att $\sup_x (1 + |x|)^\alpha |D^\beta S(x)| < \infty$.*

Följande samband gäller

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(DT) &= 2\pi i(\cdot)\mathcal{F}T & \mathcal{F}(-2\pi i(\cdot)T) &= D\mathcal{F}T \\ \mathcal{F}(ST) &= \mathcal{F}S * \mathcal{F}T & \mathcal{F}((\mathcal{F}S) * T) &= \check{S}\mathcal{F}T \\ \mathcal{F}(T_\tau) &= e^{-2\pi i\tau(\cdot)}\mathcal{F}T & \mathcal{F}(e^{2\pi i\tau(\cdot)}T) &= (\mathcal{F}T)_\tau \end{aligned}$$

där faltningarna definieras i beviset. Vidare gäller

$$D(\mathcal{F}S * T) = D\mathcal{F}S * T = \mathcal{F}S * DT$$

Bevis: Linjariteten samt sambanden i första och tredje raden verifieras direkt ur definitionen, liksom att $S \in \mathcal{S}'$. (Gör det!)

Vi skall nu definiera faltning av en godtycklig distribution $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ med en distribution $\mathcal{F}S \in \mathcal{S}'$ med den givna egenskapen. Produkten ST är i \mathcal{S}' och vi definierar $\mathcal{F}S * \mathcal{F}T$ genom $\mathcal{F}(ST) =: \mathcal{F}S * \mathcal{F}T$; fouriertransformen bestämmer ju den tempererade distributionen fullständigt. Den andra likheten i den raden följer av definitionen (den första likheten). Att faltning kommuterar med derivation (den sista raden i påståendet) följer efter fouriertransformering av det vi just visat samt att operationen multiplikation-av-distribution-med-funktion är associativ och kommutativ då den är tillåten. □

Nu till ett resultat som är användbart för våra syften; det svarar på frågan *Vad ger division med x ?*

Lemma 1.2.1⁸ Låt $T \in \mathcal{S}'$ och anta att $(\cdot)T = 0$. Då finns ett tal a så att

$$T = a\delta$$

Fouriertransformerar man i lemmat blir det så här:

Följd 1.2.1 Låt $T \in \mathcal{S}'$, och anta att $DT = 0$. Då finns en konstant a så att $T = a$.

Bevis av Lemma 1.2.1: Anta att $\psi \in \mathcal{S}$ med $\psi(0) = 0$. För $\varphi(x) = \psi(x)/x$ gäller då att $\varphi \in \mathcal{S}$ (verifiera!) och

$$T(\psi) = T((\cdot)\varphi) = (\cdot)T(\varphi) = 0$$

Ta nu $\varphi \in \mathcal{S}$ godtyckligt, fixera $\varphi_1 \in \mathcal{S}$ med $\varphi_1(0) = 1$, och skriv

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\varphi_1(x) + \varphi(0)\varphi_1(x)$$

Detta ger $(\varphi(0) - \varphi(0)\varphi_1(0) = 0)$

$$T(\varphi) = \varphi(0)T(\varphi_1) = T(\varphi_1)\delta(\varphi)$$

vilket visar lemmat med $a = T(\varphi_1)$. □

EXEMPEL 13 Låt H vara Heaviside-funktionen. Då gäller

$$\mathcal{F}H = \frac{1}{2\pi i(\cdot)} + \frac{1}{2}\delta$$

där

$$\langle \frac{1}{2\pi i(\cdot)}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{2\pi ix} \varphi(x) dx$$

(verifiera att $(2\pi i(\cdot))^{-1} \in \mathcal{S}'$!).

Vi visar att

$$\mathcal{F}H_1 = (2\pi i(\cdot))^{-1}$$

med $H_1 = H - 1/2$.⁹ Minns att

$$DH_1 = DH = \delta$$

vilket medför

$$2\pi i(\cdot)\mathcal{F}H_1 = 1$$

Lemmat ger

$$\mathcal{F}H_1 = (2\pi i(\cdot))^{-1} + a\delta$$

Notera att $\mathcal{F}H_1$ och $(2\pi i(\cdot))^{-1}$ båda är udda ($(\mathcal{F}H_1)^\vee = -\mathcal{F}H_1$) medan δ är jämn (verifiera!). Vi har således $a = 0$ och beviset är klart.

⁸ Detta resultat generaliseras inte omedelbart till dimension 2 och högre.

⁹ $2H_1 =: \text{sign}$, där sign kallas *signum-funktionen* (signum betyder tecken).

ANMÄRKNING 4 Den teori som behövs för att svara på de båda frågorna som gavs som exempel på konkret användning av distributionerna i ingressen till detta avsnittet (sid. 1) är nu beskriven.

1.3 Tillämpningar av teorin

Vi skall använda teorin för tempererade distributioner i föregående avsnitt för att visa huvudresultaten i den matematik som behövs för signalanalys.

Sats 1.4 (Poisson's Summationsformel) Låt $\varphi \in \mathcal{S}$. Då gäller

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(s+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-2\pi i k s}$$

eller, ekvivalent,

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$$

Vi ger ett bevis i dimension 1. Efter Sats 1.5 nedan ger vi med hjälp av den satsen ett bevis som kan generaliseras direkt till högre dimension.

Bevis: Vi har

$$\begin{cases} (\sum_k \delta_k)_1 = \sum_k \delta_k & (\text{period 1}) \\ e^{2\pi i(\cdot)} \sum_k \delta_k = \sum_k \delta_k & (e^{2\pi i(\cdot)} \delta_k = \delta_k) \end{cases}$$

Fouriertransformering ger

$$\begin{cases} e^{2\pi i(\cdot)} \mathcal{F} \sum_k \delta_k = \mathcal{F} \sum_k \delta_k \\ ((\mathcal{F} \sum_k \delta_k)_1 =) (\mathcal{F} \sum_k \delta_k)_{-1} = \mathcal{F} \sum_k \delta_k \end{cases}$$

Lemma 1.2.1 ger nu att en konstant a finns så att

$$\mathcal{F} \sum_k \delta_k = a \sum_k \delta_k$$

Denna likhet använd på testfunktionen $e^{-\pi x^2}$, som är sin egen fouriertransform, ger $a = 1$. Därmed är beviset klart. □

EXEMPEL 14 Låt $\varphi \in \mathcal{S}$ med $\mathcal{F}\varphi(s) = 0$, $|s| \geq 1$. Då gäller

$$\sum_n \varphi(n) = \int \varphi(x) dx$$

Integralen kan tydligen ersättas av en rektangelapproximation i heltalen i detta fallet!

Nu ett resultat om konvergens av fourierserier. En jämförelse mellan det bevis vi ger och vilket som helst mer elementärt bevis kan vara givande.

Sats 1.5 Anta att funktionen f har period 1 och är 2 gånger kontinuerligt deriverbar. Då gäller för varje x

$$f(x) = \sum_k c_k e^{2\pi i k x}$$

där fourierkoefficienterna c_k ges av (k heltal)

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} f(x) dx$$

Bevis: Partialintegration ger $c_k = \mathcal{O}(k^{-2})$, $|k| \rightarrow \infty$. Fourierserien

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

är då absolut och likformigt konvergent. Den är således en kontinuerlig funktion med period 1 och därmed i \mathcal{S}' .

Det räcker att visa likhet i \mathcal{S}' , eftersom både f och fourierserien var för sig är kontinuerliga funktioner. Likhet i \mathcal{S}' är ekvivalent med

$$\hat{f} = \sum_k c_k \delta_k$$

Poisson's Summationsformel ger ($\varphi \in \mathcal{S}$)

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int f(x) \hat{\varphi}(x) dx = \int_0^1 f(x) \sum_k \hat{\varphi}(x+k) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sum_k e^{-2\pi i k x} \varphi(k) dx \\ &= \sum_k \varphi(k) \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \sum_k c_k \varphi(k) = \langle \sum_k c_k \delta_k, \varphi \rangle \end{aligned}$$

vilket alltså avslutar beviset.

□

Nu till ett samband mellan fouriertransformer och fourierserier.

Proposition 1.3.1 För $T \in \mathcal{S}'$ med period 1 gäller

$$\begin{aligned}\mathcal{F}T &= \sum_k c_k \delta_k \\ T &= \sum_k c_k e^{2\pi i k(\cdot)}\end{aligned}$$

med några tal c_k som, då T är t.ex. en integrerbar funktion, är de vanliga fourierkoefficienterna.

Bevis: Verifiera först formlerna! Anta nu att formlerna gäller, och att $T = f$, där f är integrerbar. Ta $\varphi \in \mathcal{S}$ med $\varphi(k) = 1$ och $\varphi(x) = 0$, $|x - k| > 1/2$, och vi får med Poisson's Summationsformel

$$\begin{aligned}c_k &= \mathcal{F}T(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}\varphi(x) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x) \mathcal{F}\varphi(x+n) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(x+n) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.2 (Diskret fouriertransform: DFT) Anta att $\hat{T} \in \mathcal{S}'$ har period 1 och att T också är periodisk. Då måste T ha en heltalsperiod N och det gäller

$$\begin{aligned}T &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \delta_k \\ \hat{T} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_{k/N}\end{aligned}$$

Båda sviterna har perioden N med sambanden

$$\begin{aligned}Nc_k &= \sum_{l=1}^N t_l e^{-2\pi i k l / N} & (k = 1, \dots, N) \\ t_l &= \sum_{k=1}^N c_k e^{2\pi i k l / N} & (l = 1, \dots, N)\end{aligned}$$

Bevis: Att \hat{T} har period 1 ger enligt föregående Proposition

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \delta_k$$

Man ser här att om T också har en period så måste perioden vara ett heltal N . Detta innebär att $t_{k+N} = t_k$ för alla k och ger i sin tur

$$\hat{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_{k/N}$$

Eftersom \hat{T} har period 1 så följer $c_{k+N} = c_k$ för alla k .

Vi beräknar nu \hat{T} med hjälp av uttrycket för T .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}T &= \mathcal{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k \delta_k \\ &= \mathcal{F} \left(\sum_{k=1}^N t_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{k+lN} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N t_k e^{-2\pi i k(\cdot)} N^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{l/N} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(N^{-1} \sum_{k=1}^N t_k e^{-2\pi i kl/N} \right) \delta_{l/N} \end{aligned}$$

Sambandet $Nc_k = \sum_{l=1}^N t_l e^{-2\pi i kl/N}$ ($k = 1, \dots, N$) följer nu. Verifiera det återstående sambandet samt att

$$\mathcal{F} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{lN} = N^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{l/N}$$

□

Vi ger här ett bevis för Poisson's Summationsformel, vilket oförändrat generaliseras till dimension större än 1.

Bevis av Sats 1.4; variant: Notera att funktionen $\sum_k \hat{\varphi}(s+k)$ är obegränsat deriverbar med period 1. Vi får enligt Sats 1.5 (som kan bevisas elementärt, d.v.s. utan hjälp av Sats 1.4: alltså inget cirkelargument)

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{\varphi}(s+k) &= \sum_l e^{2\pi i ls} \int_0^1 e^{-2\pi i l\sigma} \sum_k \hat{\varphi}(\sigma+k) d\sigma \\ &= \sum_l e^{2\pi i ls} \sum_k \int_0^1 e^{-2\pi i l\sigma} \hat{\varphi}(\sigma+k) d\sigma \\ &= \sum_l e^{2\pi i ls} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i l\sigma} \hat{\varphi}(\sigma) d\sigma \\ &= \sum_l e^{2\pi i ls} \check{\varphi}(l) = \sum_l e^{-2\pi i ls} \varphi(l) \end{aligned}$$

Beviset är klart. □

Samplingsatsen står närmast på programmet. Den ger en möjlighet att, under vissa villkor på spektrum, rekonstruera en funktion i sin helhet med kunskap endast om *sampelvärdena*.

Vi skriver $\sin \pi x / (\pi x) =: \text{sinc } x$ och $1_{(-1/2, 1/2)}$, där den senare betecknar funktionen som har värdet 1 på intervallet $(-1/2, 1/2)$ och värdet 0 utanför det intervallet. Notera att $\mathcal{F}1_{(-1/2, 1/2)} = \text{sinc}$.

Sats 1.6 (Samplingsatsen) Anta att f är en funktion med egenskapen i Definition 1.2.2, och med $\hat{f}(s) = 0$, $|s| \geq 1/2$.¹⁰ Då gäller

$$\begin{aligned} f &= \text{sinc} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \text{sinc}(\cdot - k) \end{aligned}$$

Bevis: Operationerna i satsen har definierats i Proposition 1.2.1 och 1.2.3.

Det gäller att

$$\sum_k f(k) \delta_k = f \sum_k \delta_k$$

(verifiera!). Fouriertransformering ger (Poisson's Summationsformel)

$$\mathcal{F}\left(\sum_k f(k) \delta_k\right) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}\sum_k \delta_k = \mathcal{F}f * \sum_k \delta_k = \sum_k \mathcal{F}f(\cdot - k)$$

där det sista uttrycket har period 1, och som på intervallet $(-1/2, 1/2)$ sammanfaller med $\hat{f}(s)$. Beviset är klart. □

ANMÄRKNING 5 Vi har valt samplingsintervallet 1. Om nu samplingsintervallet är T och $\hat{f}(s) = 0$, $|s| \geq 1/(2T)$ så gäller

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \text{sinc}(\cdot/T - k)$$

vilket man ser genom att sätta $g(x) = f(xT)$ och använda Samplingsatsen på funktionen g .

¹⁰ f är då obegränsat deriverbar enligt Paley & Wiener, Sats 2.1.

ANMÄRKNING 6 I tekniska tillämpningar har man förstås inte tillgång till δ , sinc och heller inte $\hat{f}(s) = 0, |s| \geq 1/2$. Man gör olika approximationer, mer eller mindre framgångsrika.

T.ex. kan man approximera δ med en funktion $d \in \mathcal{S}$ som är 0 utanför $(-1/2, 1/2)$, icke-negativ, med integral 1 och med $\mathcal{F}d$ skild från 0 på $(-1/2, 1/2)$. Verifiera att det finns en funktion d_1 så att

$$f = d_1 * \sum_n f(n)d(\cdot - n)$$

ANMÄRKNING 7 Notera den komplikation Bracewell (s. 192) skapar med sin symbol $\text{III}(x) = \sum_n \delta(x - n)$: $\text{III}(x/\tau)$ tolkas där ($\tau > 0$) som $\tau \sum_n \delta(x - n\tau)$ vilket då skall vara detsamma $\sum_n \delta(x/\tau - n)$ (orsaken till detta ligger i bokens formel " $\delta(x/\tau) = \tau \delta(x)$ ") som härrör från skrivsättet " $\int \delta(x)f(x) dx = f(0)$ ".

Verifiera som kontrast följande skalning av Poisson's Summationsformel

$$\sum_n \mathcal{F}\varphi(n\tau) = |\tau|^{-1} \sum_n \varphi(n/\tau)$$

och skriv den med δ .

Allmänt gäller att man måste tänka sig noga för vid variabelbyten i samband med distributioner. (Translationer är ju dock problemfria.)

EXEMPEL 15 (Aliaseffekt) Anta att $\varphi \in \mathcal{S}$ med

$$\hat{\varphi}(s) = 0 \quad (|s| \geq 1) \quad \& \quad |\hat{\varphi}(s)| < \epsilon \quad (1/2 < |s| < 1)$$

Detta ger upphov till ett fel ("aliaseffekten") i följande approximationer

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(s) &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)e^{-2\pi i n s} \quad (|s| < 1/2) \\ \varphi(x) &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)e^{-2\pi i n s} \right] e^{2\pi i s x} ds \end{aligned}$$

vilket kan uttryckas i ϵ . Uppskatta maximala felen som övning!

EXEMPEL 16 Ett konkret exempel på aliaseffekt ges av funktionen $f(x) = \sin \pi x$ som har sampelvärdena $f(n) = 0$ för alla heltal n . (Tydligt har f precis den kritiska gränshänsen $1/2$.) Funktionerna $f_k(x) = \sin k\pi x$ ($k \neq 1$ heltal) har samtliga likaså värdet 0 i heltalspunkterna. Funktionen $f = f_1$ har alltså oändligt många alias vid sampling i heltalen: f_k med $k \neq 1$ ett heltal.

2 Analytisk Fortsättning

Vi skall diskutera några saker som kräver teori för funktioner av komplex variabel: Paley-Wiener's Sats, sambandet mellan laplacetransformen och fouriertransformen samt problemet med spektralfaktorisering.

2.1 Paley & Wiener

I Paley-Wiener's sats saknas de höga frekvenserna i spektrum, vilket är en spegling av regularitet och tillväxt hos funktionen.

Satsen innebär bl.a. att om en signal är idealt bandpassfiltrerad så kan den inte vara lokaliserad till ett ändligt tidsintervall; och omvänt.¹¹

Sats 2.1 (Paley & Wiener) Låt $f \in \mathcal{S}$. Då gäller ($A > 0$)

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) = 0, |s| \geq A \\ \iff \\ \begin{cases} f(x + iy) \text{ hel analytisk} \\ |f(x + iy)| \leq C_N(1 + x^2 + y^2)^{-N} e^{2\pi A|y|} \text{ för alla } N \in \mathbf{N} \end{cases} \end{aligned}$$

ANMÄRKNING 1 Satsen gäller också med $f \in \mathcal{S}'$ och något heltal N ; beviset blir då mer tekniskt.

Bevis: Anta att $\hat{f} = 0, |s| \geq A$. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-A}^A e^{2\pi i x s} \hat{f}(s) ds \\ &= \int_{-A}^A \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi i x s)^n}{n!} \hat{f}(s) ds \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi i x)^n}{n!} \int_{-A}^A s^n \hat{f}(s) ds \end{aligned}$$

(likformig konvergens). Eftersom $|\int_{-A}^A s^n \hat{f}(s) ds| \leq CA^n$ är konvergensradien oändlig och f kan fortsättas till en analytisk funktion i hela planet (f hel analytisk). Vidare får vi ($(x + iy)^{2N} f(x + iy)$ också hel analytisk)

$$\begin{aligned} |(x + iy)^{2N} f(x + iy)| &= (2\pi)^{-2N} \left| \int_{-A}^A e^{2\pi i(x+iy)s} D^{2N} \hat{f}(s) ds \right| \\ &\leq C_N e^{2\pi A|y|} \end{aligned}$$

vilket medför den önskade olikheten (verifiera!).

¹¹Vidare kommer satsen till användning vid studiet av lösningar till vissa partiella differentialekvationer genom *Stödsatsen*.

Omvänt, anta att $f(x + iy)$ är hel analytisk med

$$|f(x + iy)| \leq C(1 + x^2 + y^2)^{-1} e^{2\pi A|y|}$$

Låt $s > A$ och Cauchy's Integralsats ger för $y < 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x s} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (x+iy)s} f(x + iy) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x s} e^{2\pi y s} f(x + iy) dx \end{aligned}$$

(verifiera!). Men ($y < 0$)

$$e^{2\pi y s} |f(x + iy)| \leq C e^{2\pi y (s-A)} (1 + x^2)^{-1}$$

vilket ger $\hat{f}(s) = 0$, $s > A$. (Verifiera fallet $s < -A$!) Beviset är klart.

□

2.2 Sambandet mellan laplace- & fouriertransformen

Nu till sambandet mellan laplace- och fouriertransformen. Låt oss betrakta $g \in \mathcal{S}$ med $gH = f$ (f *kausal*). Då kan

$$\mathcal{F}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i s x} f(x) dx$$

fortsättas till en analytisk funktion av den komplexa variabeln s i undre halvplanet $\Im s < 0$.

Betrakta speciellt $p = 2\pi i s$, $\Re p > 0$:

$$\mathcal{F}f\left(\frac{p}{2\pi i}\right) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

Tydligt är högra ledet den ensidiga laplacetransformen av f . Man ser nu att fourier- och laplacetransformerna bestämmer varandra helt genom variabelbytet $2\pi i s = p$. *Vilken av fourier- och laplacetransformerna man använder är principiellt likgiltigt.* I litteraturen förekommer en gemensam benämning: *fourier-laplacetransformen*.

Den ensidiga laplacetransformen av $f \in \mathcal{S}$ kan skrivas som den tvåsidiga laplacetransformen av Hf :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} H(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = \mathcal{F}(Hf)\left(\frac{p}{2\pi i}\right)$$

där vi kan ha $f \neq Hf$. Från detta samband kan resultat för fouriertransformen direkt överföras till laplacetransformen, och omvänt. (Normalt konvergerar den tvåsidiga laplacetransformen i en vertikal strimma i det komplexa planet, $a < \Re p < b$.)

EXEMPEL 1 Om vi betecknar den tvåsidiga laplacetransformen av $f \in \mathcal{S}$, då definitionen har mening, med $\mathcal{L}f$ (och därmed blir den ensidiga $\mathcal{L}(Hf)$) så får vi ($2\pi i s = p$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(HDf) &= \mathcal{F}(HDf) = \mathcal{F}\{D(Hf) - f(0)\delta\} = 2\pi i(\cdot)\mathcal{F}(Hf) - f(0) \\ &= (\cdot)\mathcal{L}(Hf) - f(0)\end{aligned}$$

(minns att $D(Hf) = f\delta + HDf$; $f\delta = f(0)\delta$).

Detta är den ensidiga laplacetransformen av derivatan av en funktion f uttryckt i samma transform av funktionen och värdet i 0.

Vi visar nu med "potential-metoden" hur begynnelsevärdesproblem kan behandlas med fourier-laplacetransform.

EXEMPEL 2 (Bracewell, sidan 234) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Vi betraktar först ett allmänt högerled $S \in \mathcal{S}'$, som, så när som på $\sum_{k=0}^N a_k \delta^{(k)}$ ev, är en funktion. Man kan nu konstruera en *fundamentallösning* (*Green's funktion, potential-funktion, impulsvar*)¹² vilken ger lösningen för godtyckligt högerled S .

Betrakta, med sådant högerled S , begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = S \\ y(0+) = 1, y'(0+) = 0 \end{cases}$$

vars lösning blir en tempererad distribution, som så när som på ev. δ och derivator av δ är en funktion (verifiera!).¹³

Fundamentallösningen G definieras som lösningen till ekvationen

$$G'' + 3G' + 2G = \delta \quad \text{med} \quad G(x) = 0, x < 0$$

G kan fås genom fouriertransformering, partialbråksuppdelning och inverstransformering (verifiera!). Man får $G(x) = (e^{-x} - e^{-2x})H(x)$ här — rita grafen och inse varför!

Med $z = G * S$ får vi¹⁴

$$z'' + 3z' + 2z = S \quad \text{och} \quad z(0+) = a, z'(0+) = b$$

¹²Dessa behandlas närmare i kurser över differentialekvationer.

¹³Beteckningarna $y(0+)$ etc. är gränsvärden av funktionsdelen. (Verifiera att dessa existerar!)

¹⁴Notera att $z = G * S$ är en partikulärlösning i grundkursmening.

där a, b beror på S . (Så när som på ev. δ och derivator av δ blir z en funktion.)
 Då $S = 2$ blir $z = 1$.

Genom att till z addera en lämplig lösning till den homogena ekvationen får man den önskade lösningen y

$$y = z + c_1 e^{-(\cdot)} + c_2 e^{-2(\cdot)}$$

Konstanterna c_1, c_2 väljs så att $y(0+) = 1$, $y'(0+) = 0$, vilket är möjligt (verifiera) eftersom lösningarna $e^{-(\cdot)}$, $e^{-2(\cdot)}$, till den homogena ekvationen är linjärt oberoende. Då $S = 2$ blir $c_1 = c_2 = 0$.

I fallet $S = 2$ kan man alternativt sätta $T = Hy$; y är kontinuerligt deriverbar här. Ekvationen blir (jämför Exempel 1)

$$T'' + 3T' + 2T = 2H + 3\delta + \delta'$$

där begynnelsevillkoren nu ingår i högerledet. Lösningen fås t.ex. genom fouriertransformering, förenkling och inverstransformering. Den blir $T = H$, vilket ger $y = 1$.

2.3 Spektralfaktorisering

Vi avslutar med Spektralfaktoriseringsproblemet: Anta att vi har observerat *energispektrum*, $|\mathcal{F}f|^2$, av en, säg, elektrisk signal $f \in \mathcal{S}$. Man kan tänka sig att f har dimensionen volt och variabeln dimensionen sekund. Parseval's Formel

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}f(s)|^2 ds$$

uttrycker signalens totala energi på två sätt: $|f(x)|^2$ är energitätheten vid tiden x , *effekten*, medan $|\mathcal{F}f(s)|^2$ är energitätheten vid frekvensen s , *energispektrum*.¹⁵

Faktoriseringsproblemet är att, givet energispektrum $|\mathcal{F}f|^2$, finna funktionen f . All information om fasen av $\mathcal{F}f$ saknas alltså.

Problemet är inte entydigt lösbart. Tydligen gäller

$$|\mathcal{F}f(s)|^2 = |e^{i\theta(s)} \mathcal{F}f(s)|^2$$

d.v.s. multiplikation med en fasfaktor $e^{i\theta(s)}$ ändrar inte energispektrum.

I tillämpningar antar man ofta att den funktion man söker är kausal. Kräver vi att f skall vara kausal ($f = Hf$) är lösningen f entydig på en konstant fasfaktor när,¹⁶ ty vi har ju, för f kausal,

$$\mathcal{F}f(s) = \int_0^\infty e^{-2\pi isx} f(x) dx$$

som kan fortsättas till en analytisk funktion i $\Im s < 0$. Två analytiska funktioner med samma absolutbelopp skiljer sig som mest med en konstant faktor med absolutbelopp 1.

¹⁵Termen *effektspektrum* används då man studerar stationära stokastiska processer.

¹⁶Om f är reell är den entydigt bestämd på tecknet när.

3 Litet Sannolikhetssteori

Vi skall ge ett enkelt bevis för Centrala Gränsvärdesatsen och sedan diskutera sambandet mellan autokorrelationsfunktioner och sannolikhetsmått.

3.1 Centrala Gränsvärdesatsen

Sannolikhetsmättet av summan av n stycken oberoende stokastiska variabler med två lika sannolika utfall kan, normerad till medelvärde 0 och varians 1, representeras av faltningen (antalet faktorer är n)

$$T_n = \left(\frac{1}{2} \delta_{-1/\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \delta_{1/\sqrt{n}}\right) * \cdots * \left(\frac{1}{2} \delta_{-1/\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \delta_{1/\sqrt{n}}\right)$$

Sats 3.1 (Centrala Gränsvärdesatsen) Med T_n som ovan gäller (i \mathcal{S}')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\cdot)^2/2}$$

Bevis: Vi har (i \mathcal{S}')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{2\pi(\cdot)}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-2\pi^2(\cdot)^2}$$

(verifiera det sista elementära gränsvärdet!) Räknelagarna för fouriertransformering av funktioner ger nu satsen. □

ANMÄRKNING 1 Samma bevis kan användas för att visa Centrala Gränsvärdesatsen i fallet godtyckligt sannolikhetsmått med ändlig varians (ett sådant är $\frac{1}{2} \delta_{-1} + \frac{1}{2} \delta_1$).

3.2 Autokorrelationsfunktioner

Definition 3.2.1 Autokorrelationsfunktionen till en funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ skrivs $\varphi \star \varphi$ och definieras av

$$\varphi \star \varphi(x) := \int \varphi(x+u)\varphi^*(u) du$$

Notera att

$$\varphi \star \varphi = \varphi * (\varphi^*)^\vee$$

($\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$). Vidare har vi ($\varphi \in \mathcal{S}$)

$$\mathcal{F}\{\varphi \star \varphi\} = |\mathcal{F}\varphi|^2$$

(verifiera!) Varje sådan autokorrelationsfunktion har alltså en icke-negativ fouriertransform.¹⁷

Vi skall nu (Sats 3.2 och Anmärkning 3) ge ett svar på frågan: *Vilka objekt har (i likhet med autokorrelationsfunktionen $\varphi \star \varphi$) fouriertransformer som är begränsade positiva mått?* Det är precis dessa mått som kan normaliseras till sannolikhetsmått genom division med *totalmassan* (den minsta konstanten C i följande definition).

Definition 3.2.2 Låt $T \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$.

T kallas ett **tempererat mått** om, för alla $\varphi \in \mathcal{S}$ med $\varphi = 0$ utanför ett begränsat fixerat intervall, gäller

$$|T(\varphi)| \leq C \sup_x |\varphi(x)|$$

Om C är oberoende av intervallet kallas måttet **begränsat**.

T kallas **positiv** om $T(\varphi) \geq 0$ för alla $\varphi \geq 0$, och vi skriver $T \geq 0$.

T kallas **positivt definit** om $T(\varphi \star \varphi) \geq 0$ för alla φ .

Motiveringen till beteckningen “positivt definit” kommer i Exempel 2 nedan.

Proposition 3.2.1 Låt $T \in \mathcal{S}'$. Då är $\mathcal{F}T$ positiv om, och endast om, T är positivt definit.

Vidare gäller att om T är positiv så är T ett (positivt tempererat) mått.

Bevis: Följande gäller för alla $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}T(\varphi) \geq 0, \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}T(|\varphi|^2) \geq 0 \Leftrightarrow T(\varphi \star \varphi) \geq 0$$

(verifiera det sista steget!) Det första steget (åt det svåra hållet) verifieras genom att sätta för $0 \leq \psi \in \mathcal{S}$ med värdet 0 utanför ett begränsat intervall

$$\psi_n(x) = (\psi(x) + e^{-x^2}/n)^{1/2}$$

och notera att ψ_n^2 går mot ψ i \mathcal{S} (verifiera!).

För att visa det andra påståendet, ta reellvärda (*sic!*) $\varphi_n \in \mathcal{S}$ som är 0 utanför ett fixerat begränsat intervall och med $\sup_x |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$. Låt $0 \leq \varphi \in \mathcal{S}$ vara 1 på intervallet, och ta $\varepsilon > 0$ godtyckligt. För tillräckligt stora n gäller att $\varepsilon\varphi \pm \varphi_n \geq 0$, vilket ger $\varepsilon T(\varphi) \pm T(\varphi_n) \geq 0$, eller $|T(\varphi_n)| \leq \varepsilon T(\varphi)$. Vi får $T(\varphi_n) \rightarrow 0$, vilket medför den önskade olikheten (verifiera!). Beviset är klart.

□

¹⁷ $\varphi \star \varphi$ normaliseras ibland genom att divideras med skalfaktorn $\int |\varphi(u)|^2 du$ och skrivs då γ . Då följer $\int \hat{\gamma}(s) ds = 1$ och $\hat{\gamma} \geq 0$; varav *sannolikhetsmått*.

EXEMPEL 1 Om $\varphi \in \mathcal{S}$ så är $\varphi \star \varphi$ positivt definit (verifiera!).

EXEMPEL 2 Anta att f är en kontinuerlig funktion som också är en positivt definit tempererad distribution. Då har vi

$$|f(x)| \leq f(0) \quad \text{och} \quad \check{f} = f^*$$

Vi verifierar detta genom att notera att

$$0 \leq \int f(x)\varphi \star \varphi(x) dx = \int f(x+y)\varphi(x)\varphi(-y)^* dx dy$$

och där välja φ som approximerar $\sum_{j=1}^n z_j \delta_{x_j}$. Detta ger villkoret

$$\sum_{j,k} f(x_j - x_k) z_j z_k^* \geq 0$$

som är uppfyllt för alla val av x_j, z_j .

I fallet $x_1 = 0, x_2 = x$ medför villkoret att matrisen

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{bmatrix}$$

är positiv. Vi får $\check{f} = f^*$ och $|f(x)| \leq f(0)$, vilket vi ville visa (verifiera att $f(0) \geq 0$!).

Att matrisen $[f(x_j - x_k)]$ är positivt definit innebär enligt definition att likhet i villkoret fås bara då alla $z_j = 0$.¹⁸

EXEMPEL 3 Låt T vara positivt definit. Då gäller $\check{T} = T^*$ där $T^*(\varphi) := T(\varphi^*)^*$. Verifiera detta!

Verifiera också att δ är ett positivt begränsat mått med totalmassan 1 (i likhet med varje positiv integrerbar funktion med integral 1) samt att funktionen $f(x) = x^2$ är ett positivt obegränsat mått.

Kontrollera slutligen att t.ex. funktionen $f(x) = e^{x^2}$, som inte tillhör \mathcal{S}' , ändå har den första egenskapen i Definition 2. Funktionen f är ett positivt mått som inte är tempererat. Detta går vi inte närmare in på här.

Sats 3.2 (Bochner) Anta att $f \in \mathcal{S}'$ är positivt definit och en kontinuerlig funktion. Då är $\mathcal{F}f$ ett begränsat positivt mått.

Bevis: Enligt Proposition 3.2.1 är $\mathcal{F}f \geq 0$ och ett positivt mått. Välj nu $0 \leq \varphi \in \mathcal{S}$ sådan att $\varphi(0) = 1$ och $\mathcal{F}\varphi(s) = 0, |s| \geq 1$ (verifiera att detta går!). Sätt $\varphi_n(x) = \varphi(x/n), n = 1, 2, \dots$

¹⁸Om f är periodisk blir matrisen positiv men inte alltid positivt definit. Man kan visa att om $|f(x_0)| = f(0)$ och $|f(x)| < f(0), 0 < |x| < |x_0|$, så gäller $\mathcal{F}f = \sum_k a_k \delta_{(k+\alpha)/x_0}$ där $\sum_k a_k = f(0), a_k \geq 0$, och $f(x_0) = e^{2\pi i \alpha} f(0)$.

Vi får ($\mathcal{F}f \geq 0$, f kontinuerlig)

$$0 \leq \mathcal{F}f(\varphi_n) = f(\mathcal{F}\varphi_n) = \int_{|x| \leq 1/n} f(x) \mathcal{F}\varphi_n(x) dx \longrightarrow f(0)$$

Betrakta nu ett godtyckligt begränsat intervall (a, b) . Observera att $\varphi_n(x) \geq 1 - \varepsilon$ i det intervallet om n är tillräckligt stort. Ta $\psi \in \mathcal{S}$ som är 0 utanför intervallet (a, b) . Då följer ($\varepsilon > 0$ godtyckligt)

$$\varphi_n(x) \pm (1 - \varepsilon)\psi(x) / \sup_x |\psi(x)| \geq 0$$

och alltså¹⁹

$$(1 - \varepsilon)|\mathcal{F}f(\psi)| / \sup_x |\psi(x)| \leq \mathcal{F}f(\varphi_n) \leq f(0) + \varepsilon$$

om n är tillräckligt stort. Således har vi

$$|\mathcal{F}f(\psi)| \leq f(0) \sup_x |\psi(x)|$$

Beviset är klart. □

ANMÄRKNING 2 Med det allmännare begreppet distribution och motsvarande definition av positivt definit distribution, kan man visa att (Schwartz' Sats) T är positivt definit precis då $\mathcal{F}T$ är ett positivt mått. En bevis-idé är att regularisera T genom en faltning med approximativa δ till en kontinuerlig funktion som är positivt definit i \mathcal{S}' ; använda Bochner's Sats (Sats 3.2) och göra en gränsövergång.

För tempererade distributioner är detta Proposition 3.2.1. Det positiva måttet är där en tempererad distribution, vilket inskränker möjligheterna (se Exempel 3).

ANMÄRKNING 3 För ett positivt mått med ändlig totalmassa kan man visa att fouriertransformen blir en (positivt definit) kontinuerlig funktion vars värde i 0 är lika med totalmassan av måttet.

¹⁹Jämför med beviset av Proposition 3.2.1.

4 Valda nedslag

Vi gör här några valda nedslag i kursboken, ungefär i den ordning sakerna kommer där. Vi börjar med Osäkerhetsrelationen, sedan kommer Gibbs' Fenomen och därefter Radon-transformen.²⁰ Nästa nedslag är något om antenner och tunna linser. Vi avslutar med en diskussion av några frågor kring diskretisering och fouriertransformering.

4.1 Osäkerhetsrelationen

Osäkerhetsrelationen i kvantmekaniken är matematiskt det faktum att de två integralerna

$$\int |Df(x)|^2 dx (= 4\pi^2 \int |s\mathcal{F}f(s)|^2 ds) \quad \text{och} \quad \int |xf(x)|^2 dx$$

inte båda kan vara små samtidigt. Mer precist har vi

Sats 4.1 (Osäkerhetsrelationen) Låt $f \in \mathcal{S}$ med $\int |f(x)|^2 dx = 1$. Då gäller

$$\frac{1}{2} \leq \left(\int |Df(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Bevis: Följande identitet är basen i beviset. (Verifiera denna!)

$$f = D\{(\cdot)f\} - (\cdot)Df$$

Vi använder detta, partiell integration och till sist Cauchy-Schwarz' Olikhet

$$\begin{aligned} 1 &= \int f(x)f(x)^* dx = \int D\{xf(x)\}f(x)^* dx - \int xDf(x)f(x)^* dx \\ &= - \int xf(x)Df(x)^* dx - \int Df(x)xf(x)^* dx \\ &\leq 2 \left(\int |Df(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Beviset är klart.

□

²⁰I kursboken kallas Radon-transformen för Abel-transformen och behandlas endast för radiella funktioner i dimension 2.

4.2 Gibbs' Fenomen

Gibbs' Fenomen kallas den översläng som partialsummorna till fourierserien visar vid en sprängdiskontinuitet hos funktionen. Vi skall nu beräkna överslängen uttryckt i språngets höjd.

Låt f och g ha perioden 1 och låt D^2g vara kontinuerlig. Då konvergerar fourierserien för g likformigt mot g i alla punkter enligt Sats 1.5. Anta att

$$g 1_{(-1/2,1/2)} = (f - (H - 1/2)) 1_{(-1/2,1/2)}$$

det vill säga f har ett enhetssprång i hel- och halvtalen jämfört med g ; för övrigt är de lika regulära. (Rita en figur!)

Vi skall nu undersöka $f - g$ som är en fyrkantvåg — Gibbs' fenomen för f blir detsamma som för fyrkantvågen $f - g$ (verifiera!). På intervallet $(0, 1/2)$ betraktar vi skillnaden (som ger överslängen)

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x} - (H(x) - 1/2) = - \sum_{|n|>N} c_n e^{2\pi i n x}$$

(med punktvis konvergens för $0 < |x| < 1/2$).

Efter beräkning av c_n har vi (med $N = 2M + 1$)

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{k=0}^M \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin 2\pi(2k+1)x$$

Minsta positiva extrempunkt (sätt derivatan lika med 0) är här $x = 1/(4M + 4) = 1/(2N + 2)$, vilket ger

$$- \sum_{|n|>N} c_n e^{\pi i n/(N+1)} = - \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin(\pi(2k+1)/(2M+2))$$

Då $N \rightarrow \infty$ så följer att $M \rightarrow \infty$ och högra ledet (som är en riemannsumma) konvergerar mot

$$- \int_1^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx \approx 0,0894899$$

(där värdet beräknats genom *Mathematica*). Överslängen är alltså cirka 9% av språnget då $N \rightarrow \infty$.

4.3 Radontransformen

I dimension 2 är radontransformen av en funktion dess integral över alla linjer. Detta används t.ex. vid *datortomografi*: funktionen $f(x)$ representerar absorptionskoefficienten i (vävnads-)materialet per längdenhet och man observerar

absorptionen då en röntgenstrålen går igenom kroppen längs linjen L

$$\int_L f(x(l)) dl$$

Man tänker sig nu detta gjort för varje linje L och söker funktionen f , som representerar hur den undersökta kroppen ser ut inuti. Man önskar alltså återskapa funktionen från värdena av integralerna över linjer.²¹

Definition 4.3.1 Radontransformen av en funktion $f \in \mathcal{S}$ är

$$\mathcal{R}_\theta f(s) := \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx$$

där $|\theta| = 1$.²²

Notera att $\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}_{-\theta} f(-s)$ och att kravet $|\theta| = 1$ görs för att linjen skall svara omvändbart entydigt mot (θ, s) , så när som på tecknet.

ANMÄRKNING 1 I kursboken definieras *abeltransformen* av den i planet givna *radiella* funktionen f genom ($x > 0$)

$$\mathcal{A}f(x) := 2 \int_{r>x} f(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

samt $\mathcal{A}f(-x) := \mathcal{A}f(x)$.²³

Verifiera att abeltransformen är radontransformen över t.ex. linjer $x = s$ i (x, y) -planet av den radiella funktionen f . Detta faktum gör att *abeltransformen sammansatt med hankeltransformen*²⁴ är detsamma som *radontransformen sammansatt med fouriertransformen (i dimension 2)*.

ANMÄRKNING 2 I dimension $n \geq 3$ kan man göra integrationen på flera sätt. Ett är att integrera över det $(n - 1)$ -dimensionella (hyper-)planet $x \cdot \theta = s$; ett annat är att integrera över linjerna $x = t + l\eta$, där $|\eta| = 1$ och $t \cdot \eta = 0$. Detta senare verkar mest naturligt vid röntgenundersökning i dimension 3.

En nära till hands liggande fråga är nu: Vilka familjer av "ytor" eller "linjer" kan man integrera över och fortfarande ha all information kvar?²⁵

²¹Problemet löstes av Radon i början av detta sekel.

²²Variabeln s har en annorlunda roll i detta avsnitt, och θ är en punkt på enhetscirkeln (-sfären)!

²³Det sista görs endast implicit i kursboken.

²⁴fouriertransformen av radiella funktioner

²⁵Vi hänvisar till boken HELGASON S., *The Radon Transform*, Birkhäuser, 1980, som innehåller en grundlig genomgång av de centrala frågorna kring radontransformen.

ANMÄRKNING 3 I tekniska tillämpningar tillkommer problem kring diskretisering (sampling) och rekonstruktion.²⁶ Ett exempel är att man, av praktiska skäl, samplar i polära koordinater och vill använda flink fouriertransform, FFT, som sker i rätvinkliga koordinater...

Vi visar nu det resultat på vilket datortomografin vilar, teoretiskt sett. Satsen säger att fouriertransformen av funktionen är fullständigt bestämd av fouriertransformen av dess radontransform.

Sats 4.2 (Radon) Låt $f \in \mathcal{S}$. Då gäller

$$\mathcal{FR}_\theta f(\sigma) = \mathcal{F}f(\sigma\theta)$$

Bevis: Det räcker att betrakta fallet $\theta = (1, 0)$ eftersom en vridning av koordinatsystemet i (x_1, x_2) -planet svarar mot samma vridning i frekvensplanet. (Verifiera!)

Vi får med $\theta = (1, 0)$ att $x \cdot \theta = x_1$ och därmed

$$\begin{aligned} \mathcal{FR}_\theta f(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \sigma s} \int_{x_1=s} f(x_1, x_2) dx_2 ds \\ &= \iint e^{-2\pi i \sigma(1,0) \cdot (x_1, x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \mathcal{F}f(\sigma\theta) \end{aligned}$$

□

Vi avslutar med en utgångspunkt för rekonstruktion av en funktion från dess radontransform. Minns att hilberttransformen svarar mot multiplikation med $i \operatorname{sign}(\cdot)$ på fouriertransform-sidan, och att derivation svarar mot multiplikation med $2\pi i(\cdot)$.

EXEMPEL 1 Låt $f \in \mathcal{S}$. Då gäller i dimension 2 med byte till polära koordinater ($\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}_{-\theta} f(-s)$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi \\ &= \int e^{2\pi i \sigma \theta \cdot x} \mathcal{F}f(\sigma\theta) \sigma d\sigma d\theta \\ &= 1/2 \int e^{2\pi i \sigma \theta \cdot x} \mathcal{F}f(\sigma\theta) \sigma \operatorname{sign} \sigma d\sigma d\theta \\ &= -1/(4\pi) \int e^{2\pi i \sigma(\theta \cdot x - s)} i \operatorname{sign} \sigma 2\pi i \sigma \mathcal{R}_\theta f(s) ds d\sigma d\theta \end{aligned}$$

där integrationen från tredje likhetstecknet utsträcks över alla σ , d.v.s. även över negativa värden.

²⁶För vidare information hänvisar vi till boken NATTERER F., *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley, 1986.

4.4 Antenner och tunna linser

Vi diskuterar i detta avsnittet *koherent* elektromagnetisk strålning: våglängden är alltså fixerad (liksom frekvensen).

Först gäller det antenner och sambandet mellan fältet i aperturen och riktningskaraktistiken, vilket ges approximativt av fouriertransformen.

För det andra skall vi se att ett fält i ena fokalplanet till en tunn konvex lins ger approximativt upphov till sin fouriertransform i det andra fokalplanet.

Antenner

Vi sammanfattar här endast kursbokens resonemang om antennfält och använder samma beteckningar.

Betrakta fallet att fältet i antennens apertur kan beskrivas som en funktion av endast en lägesvariabel: $E(x)e^{i\omega t}$, där ω är cirkelfrekvensen. I punkten P på avståndet r från punkten x blir då bidraget $E(x)e^{i\omega t}e^{-2\pi ir/\lambda}$ från aperturfältet enligt Huyghens Princip, där $\lambda\omega/(2\pi)$ är utbredningshastigheten hos fältet. Låt nu R beteckna avståndet mellan punkten $x = 0$ och punkten P , samt θ vinkeln mellan x -axeln och linjen genom $x = 0$ och P .

Cosinussatsen ger sambandet

$$r^2 = R^2 + x^2 - 2xR \cos(\theta + \pi/2)$$

eller

$$r = R \left(1 + 2(x/R) \sin \theta + (x/R)^2 \right)^{1/2}$$

För $x \ll R$ (långt bort i förhållande till antenndimensionerna) har vi nu approximativt

$$r = R + x \sin \theta$$

vilket ger, efter integration över x och med $s = (\sin \theta)/\lambda$, fältet vid P

$$e^{-2\pi i R/\lambda + i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} E(x)e^{-2\pi i x s} dx = e^{-2\pi i R/\lambda + i\omega t} \hat{E}(s)$$

Eftersom $s = (\sin \theta)/\lambda$ är detta väsentligen riktningskaraktistiken då $|\theta| \ll 1$.

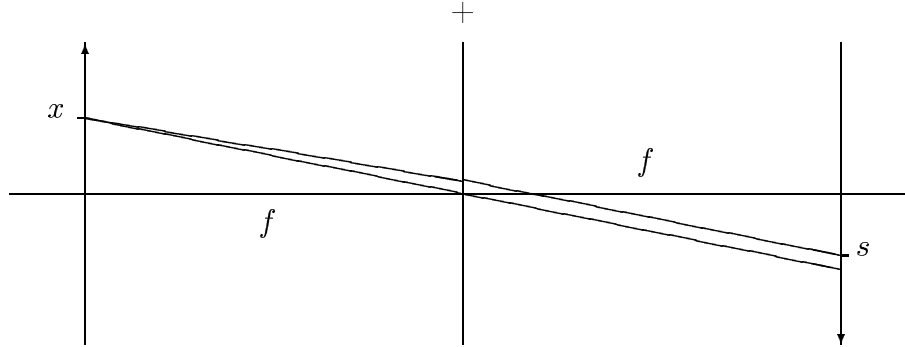
EXEMPEL 2 För $E = 1_{(-1/2, 1/2)}$, δ , $\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}$ blir karaktistiken approximativt respektive sinc , 1 , $\cos(\pi(\cdot)/\lambda)$, väsentligen.

En tunn konvex lins

Vi skall betrakta en tunn konvex lins med fokaldistans f och fältet $E(x)e^{i\omega t}$ i ena fokalplanet. Vi inskränker oss också till "centrala strålar". Se figuren nedan för beteckningar.

Vi diskuterar problemet i 1 rumsdimension, och lämnar det i 2 rumsdimensioner som en övning. Slutformlerna rörande sambandet mellan fälten i de båda

fokalplanen är desamma i båda fallen. Anta alltså att fältet i ena fokalplanet ges av $E(x)e^{i\omega t}$, där ω är cirkelfrekvensen. $\lambda\omega/(2\pi)$ är utbredningshastigheten hos fältet.



Strålar från en punkt x i ena fokalplanet bryts till parallella strålar av linsen, varvid strålen genom linsens centrum inte bryts alls. Detta ger att en stråle från punkten x till punkten s har väglängden

$$(f^2 + s^2)^{1/2} + (f^2 + x^2)^{1/2}$$

vilket är, då $x \ll f$, $s \ll f$, approximativt lika med $2f + (x^2 + s^2)/(2f)$. Antagandet om centrala strålar innebär $x \approx s$ och därmed blir den approximativa väglängden

$$2f + xs/f$$

Bidraget från punkten x till fältet vid punkten s är alltså $E(x)e^{i\omega t}e^{-2\pi i(2f+xs/f)/\lambda}$ enligt Huyghens Princip. Detta ger, efter integration över x , det totala fältet vid punkten s

$$e^{-4\pi if/\lambda+i\omega t} \int E(x)e^{-2\pi ixs/(f\lambda)} dx = e^{-4\pi if/\lambda+i\omega t} \hat{E}(s/(f\lambda))$$

Detta samband säger att fältet i ena fokalplanet ger upphov till väsentligen sin fouriertransform i det andra fokalplanet.

EXEMPEL 3 Låt funktionen

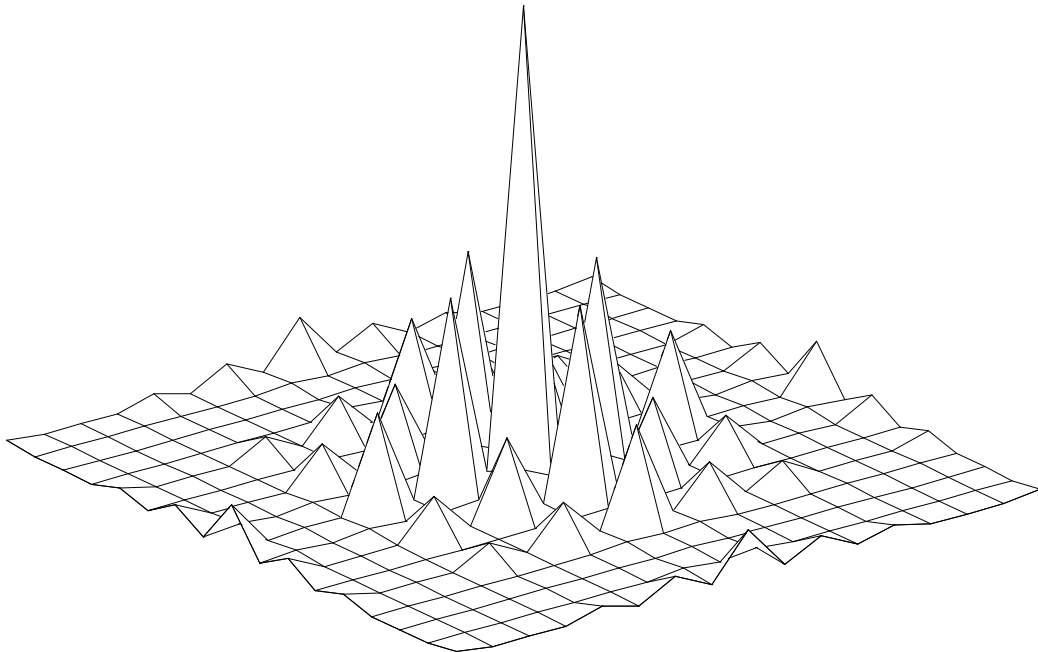
$$f(x) = \left[\sum_n 1_{(-1/2,1/2)}((x_1 - n_1)/\epsilon)/\epsilon 1_{(-1/2,1/2)}((x_2 - n_2)/\epsilon)/\epsilon \right] 1_{(0,1)}(r/R)/R$$

representera ett kvadratisk raster. Kvadraterna har kant ϵ och centrum i punkterna med heltalskoordinater, $n = (n_1, n_2)$. Rastret är avskärmat med en irisbländare med radie R .

Fourier-transformering ger

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \left[\sum_n \text{sinc}(\epsilon s_1) e^{-2\pi i n_1 s_1} \text{sinc}(\epsilon s_2) e^{-2\pi i n_2 s_2} \right] * J_1(2\pi Rq)/q \\ &= \left[\text{sinc}(\epsilon s_1) \text{sinc}(\epsilon s_2) \sum_n \delta_n \right] * J_1(2\pi Rq)/q \\ &= \sum_n \text{sinc}(\epsilon n_1) \text{sinc}(\epsilon n_2) J_1(2\pi R|s - n|)/|s - n|\end{aligned}$$

Grafen av fourier-transformens absolutbelopp nedan har genererats med MATLAB. Det behövdes ungefär 40 Mflops för att beräkna de 289 funktionsvärden som grafen genererats från. Parametrarna var $\epsilon = 2/3$, $2\pi R = 20$, $-4 < s_1 < 4$, $-4 < s_2 < 4$. (Intervallen har utökats med 0.001 vid vardera gränsen.)



4.5 Diskretiseringsfrågor

Sampling och fouriertransformering

Vid numerisk behandling av funktioner och fouriertransformer approximerar man ofta en funktion f exempelvis i \mathcal{S} med ändligt många ändliga decimalbråk. Detta kan ske genom att ta ändligt många sampelvärden, och avrunda dem till ändliga decimalbråk.²⁷ Vi förutsätter att lågpasfiltrering har skett, så att $\mathcal{F}f(s) = 0$, $|s| \geq 1/2$. Samplingsatsen säger då att sampelvärdena $f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$, innehåller informationen om övriga funktionsvärden och ($|s| \leq 1/2$)

$$\mathcal{F}f(s) = \sum_n f(n)e^{-2\pi i n s} = \sum_n f(n)z^{-n} = F(z) \quad ^{28}$$

Med exemplet $f \in \mathcal{S}$, som vi här valt, måste oändligt många sampelvärden vara skilda från 0 (verifiera!). Man kastar därför bort alla sampelvärden utom ändligt många, säg N stycken. Vi låter, med A som i Approximation,

$$\mathcal{F}f_A(s) := \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-2\pi i n s}$$

Sätt $F_\nu := N^{-1}\mathcal{F}f_A(\nu/N)$, $f_n := f(n)$ och vi får "DFT" (diskret fouriertransform). Jämför Prop. 1.3.2 ovan!

$$\begin{aligned} NF_\nu &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n \nu / N} & (0 \leq \nu \leq N-1) \\ f_n &= \sum_{\nu=0}^{N-1} F_\nu e^{2\pi i n \nu / N} & (0 \leq n \leq N-1) \end{aligned}$$

Hur mycket har fouriertransformen påverkats av approximationen? En grov uppskattning ger ($|s| \leq 1/2$)

$$|\mathcal{F}f(s) - \mathcal{F}f_A(s)| \leq \sum_{n \neq 0, \dots, N-1} |f(n)|$$

där felet är uttryckt i de bortkastade värdena. Den följande inskränkningen till F_ν innebär ingen ytterligare förlust av information (verifiera!).

²⁷Sampelvärdena antas normalt inte alla vara ändliga decimalbråk. Avrundningsfel förmodas vanligen vara oberoende och likafördelade. Vi diskuterar inte detta vidare, utan antar att sampelvärdena är exakta funktionsvärden.

²⁸ z -transformen av den samplade signalen är den kontinuerliga signalens fouriertransform med $z = e^{2\pi i s}$, $|s| \leq 1/2$.

Olika faltningar

Faltningen av två tempererade distributioner som är kontinuerliga periodiska funktioner (med samma period) kan inte definieras inom våra ramar; verifiera detta till exempel genom att fouriertransformera den tilltänkta faltningen.

Man kan däremot definiera en *periodisk faltning* av två periodiska funktioner f och g , båda med period 1, genom sambandet

$$f \circledast g(x) := \int_0^1 f(x-y)g(y) dy$$

där $f \circledast g$ får period 1. För fourierkoefficienterna gäller att den periodiska faltningen innebär multiplikation av dessa (verifiera!).

Notera att en funktion som sätts till 0 utanför ett begränsat intervall kan fortsättas till en periodisk funktion utan att ytterligare information försvinner (om man inte glömmer varifrån funktionen fortsattes).

För sviter $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, innebär standarddefinitionen av faltning

$$(f * g)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n-k}g_k$$

att z -transformerna multipliceras. Har sviterna längd M (d.v.s. 0 utanför M konsekutiva platser, och skild från 0 på ändplatserna) respektive N får faltningen längd $M + N - 1$.

Två sviter med längd N , $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, kan man fortsätta periodiskt och då definiera en *periodisk faltning*:

$$(f \circledast g)_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_{n-k}g_k$$

som blir periodisk med period N . För fouriertransformerna F_ν , G_ν , ovan (som också kan fortsättas periodiskt med period N) innebär den periodiska faltningen multiplikation. Verifiera detta!

Den periodiska faltningen och den vanliga faltningen kan fås att sammanfalla genom att fylla på med nollor. Låt $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$, $\{g_n\}_{n=0}^{N-1}$ båda ha längd N , och låt $\{f_n^0\}$, $\{g_n^0\}$ vara desamma med $N - 1$ nollor påfyllda i slutet. Då gäller

$$(f^0 \circledast g^0)_n = (f * g)_n \quad (0 \leq n \leq 2N - 2)$$

Verifiera detta!

Flink Fourier-Transform: FFT

Vi beskriver huvudidén bakom den snabba algoritmen, FFT, för beräkning av fouriertransformen av en svit av vissa längder N . Vi tar $N = 2^n$, men samma

princip går att använda i fallet $N = p_1 p_2 \cdots p_n$ med p_i primtal. Antalet operationer *multiplitera-och-addera* blir $N^2 \log N$, då $N = 2^n$.²⁹

Låt först $N = 2$. Vi har

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + x_1 \\ X_1 &= x_0 - x_1 \end{aligned}$$

Tydligt behövs 2 operationer *multiplitera-och-addera*.

Låt nu $N = 4$. Vi har

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ X_1 &= x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 \\ X_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ X_3 &= x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 \end{aligned}$$

Här kan man använda fallet $n = 2$ på de båda paren (x_0, x_2) och (x_1, x_3) och sedan utföra 4 operationer; alltså totalt 8 operationer.

Låt slutligen $N = 8$. Dela in sviten i två grupper:

$$(x_0, x_2, x_4, x_6) \quad \text{och} \quad (x_1, x_3, x_5, x_7)$$

Använd fallet $N = 4$ på vardera gruppen. Verifiera att det behövs ytterligare 8 operationer! (1 per fourier-koefficient.)

Det är nu förhoppningsvis möjligt att urskilja huvudidén bakom FFT; och därmed också att skriva ett program för allmänt $N = 2^n$.³⁰

Hur många operationer blir det som minst med samma teknik i det allmänna fallet $N = p_1 p_2 \cdots p_n$?

EXEMPEL 4 Multiplikation av två tal innebär faltning av sviterna i representationen i godtycklig bas. (Jämför z -transformen.) Har talen båda $N = 2^n$ stycken siffror innebär beräkning rakt fram av faltningen $N(N+1)/2$ operationer *multiplikation-och-addition* — ett kvadratisk beroende av antalet siffror. Om man i stället först fouriertransformerar med FFT, därefter multiplicerar transformerna och slutligen inverstransformerar med FFT, blir antalet operationer $N + 3N^2 \log N$ — vilket växer väsentligt mindre än kvadratisk med antalet siffror.

Ett praktiskt problem vid användandet av FFT är att inte alla sviter har längd $N = 2^n$. Detta problem samt problemet med att kasta bort sampelvärden är föremål för en laboration, där också åtgärder för att minska oönskade biverkningar undersöks.

²⁹Utför man transformering rakt fram av en svit av längd N behövs $N(N-1)$ operationer (verifiera!).

³⁰En diskussion av matematiska anknytningar till huvudidén och litet historia hittar man i artikeln AUSLANDER L. & TOLIMIERI R., Is computing with the finite fourier transform pure or applied mathematics? *Bull. Amer. Math. Soc.* 1:6 (1979), 847–897. (Tidskriften finns i institutionens bibliotek.)

5 Wavelet-analys – en skiss av idén

En nackdel med fourier-transformen är att, om man ändrar den lokalt i frekvens så ändras motsvarande funktion globalt i tid: ändrar man en term i fourier-summan, så ändras funktionen överallt.

Ett sätt att kringgå denna nackdel är att göra en *wavelet-transform*.³¹ En given funktion $f \in L^2$ ($|f|^2$ integrerbar) delas då upp i en summa

$$f(x) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} 2^{-k/2} \psi(2^{-k}x - l)$$

där

$$a_{k,l} = \int f(x) 2^{-k/2} \psi(2^{-k}x - l)^* dx$$

I mer komprimerade beteckningar blir detta

$$f = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \psi_{k,l} \quad \text{där} \quad a_{k,l} = (f, \psi_{k,l})$$

Varje term är en dilation och en translation av en wavelet $\psi \in L^2$ som är huvudsakligen lokaliserad i ett frekvensband och samtidigt huvudsakligen lokaliserad i ett tidsintervall. Önskar man smalt frekvensband får man sämre lokalisering i tid och tvärtom, på grund av Osäkerhetsrelationen. Summan skall uppfattas som konvergent i L^2 och likheten gäller för nästan alla x .

Notera att skalan ökar (fördubblas) då k ökas till $k+1$ — detta är skälet till minustecknet i 2^{-k} .

Wavelet-systemet kan också väljas ortogonalt eller ej, beroende på i vilket syfte uppdelningen görs.

Wavelet-transformen finns, i likhet med fourier-transformen, både i kontinuerlig, diskret samt ändlig variant.

Vi diskuterar endast den diskreta och den ändliga varianten för reella ortonormerade system av wavelets här.

Beräkningstekniskt är wavelet-algoritmen bättre än FFT: antalet operationer är mindre än $(n+1)2^{K+1}$ då svitlängden är 2^K , där n är en (liten) konstant som beror på vilket system som används. För *Haar-systemet* är $n=1$.

En bra referens för teorin kring wavelets är INGRID DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992. Daubechies har själv bidragit till utvecklingen av teorin.

I det följande beskriver vi resonemanget för ett allmänt ortonormerat system av reella wavelets, vars rekursionskoefficienter är ändligt många. Algoritmerna diskuteras sedan och exemplifieras med Haar-systemet. Slutligen tolkar vi analysen i termer av en skala av underrum i L^2 med tillhörande projektioner och ortogonalkomplement.

³¹ *wavelet* kan översättas med *liten våg* eller *krusning* — “vågtransform”?

5.1 Wavelets

Vi utgår från funktionen $\phi \in L^1 \cap L^2$ med $\int \phi \neq 0$, **skalningsfunktionen**, som uppfyller en rekurrenskvation

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n c_k 2^{1/2} \phi(2x - k)$$

samt ett ortonormeringsvillkor

$$\int \phi(x - m) \phi(x) dx = \delta_{m0}$$

Funktionen normaliseras då genom $(\int \phi^2)^{1/2} = (\sum_{k=0}^n c_k^2)^{1/2} = 1$ (termerna i högerledet blir ortogonala).

För Haar-systemet är $\phi = 1_{(0,1)}$, $n = 1$ och $c_0 = c_1 = 2^{-1/2}$.

Notera att för $0 \leq x \leq n/2$ gäller $-k \leq 2x - k \leq n - k$. Om således $\phi(x) = 0$ utanför intervallet $(0, n)$ (se nästa övning) så är dess värden i halvtalen i $(0, n/2)$ bestämda av dess värden i heltalen i $(0, n)$. I Haar-systemet (ϕ har språng i 0 och 1) sätter man t.ex. $\phi(0) = 1$ och $\phi(1) = 0$.

Fourier-transformerar man rekurrenskvationen blir det

$$\mathcal{F}\phi(s) = \mathcal{F}\phi(s/2) 2^{-1/2} \sum_{k=0}^n c_k e^{-\pi i k s} := \mathcal{F}\phi(s/2) p(s/2)$$

Notera att $p(0) = 1$ följer här. Upprepas halveringen får vi

$$\mathcal{F}\phi(s) = \mathcal{F}\phi(s/2^N) \prod_{k=1}^N p(s/2^k)$$

och, då $N \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{F}\phi(s) = \mathcal{F}\phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} p(s/2^k)$$

I Haar-systemet är båda leden funktionen $e^{-\pi i s} \operatorname{sinc} s$.

Övning 5.1.1 Visa att den senaste ekvationen medför att $\phi(x) = 0$ utanför $(0, n)$.

Tydligt kan polynomet p eller dess koefficienter c_k sägas innehålla all information om funktionen ϕ . I analys- och rekonstruktionsalgoritmerna nedan förekommer endast koefficienterna c_k .

Ortonormeringsvillkoret för heltalstranslaten av ϕ ovan blir med Parseval

$$\begin{aligned} \delta_{m0} &= \int \mathcal{F}\phi(s) \left(e^{-2\pi i m s} \mathcal{F}\phi(s) \right)^* ds \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i m s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\phi(s+l)|^2 ds \end{aligned}$$

vilket medför

$$1 \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\phi(s+l)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\phi((s+l)/2)|^2 |p((s+l)/2)|^2$$

Detta ger nu (betrakta l jämnt respektive udda i summan; p har period 1)

$$|p(s)|^2 + |p(s+1/2)|^2 \equiv 1$$

eller

$$\sum_{k=0}^n c_{k+2m} c_k = 0 \quad (1)$$

Från ϕ definierar man funktionen ψ , **the wavelet**, som skall uppfylla de båda centrala kraven

$$\int \psi(x)\phi(x-m) dx = 0$$

för alla heltal m , samt

$$\psi(x) = \sum_k d_k 2^{1/2} \phi(2x-k)$$

Dessa innebär att linjärkombinationer av heltalstranslat av ψ är ortogonala mot sådana av ϕ och att ψ är en linjärkombination av halvtalstranslat av ϕ i halva skalan. Man normerar också här med $(\int \psi^2)^{1/2} = (\sum_k d_k^2)^{1/2} = 1$.

Vi skall nu se att koefficienterna d_k är nästan helt bestämda av koefficienterna c_k . Parseval och rekurrenskvationen ger, med $q(s) := 2^{-1/2} \sum_k d_k e^{-2\pi i k s}$ och efter samma räkningar som ovan (verifiera!), villkoret

$$p(s)^* q(s) + p(s+1/2)^* q(s+1/2) = 0$$

Detta är uppfyllt (väsentligen bara) för

$$q(s) = e^{-2\pi i(s+1/2)} p(s+1/2)^*$$

vilket medför $q(0) = 0$ enligt identiteten för polynomet p ovan samt $p(0) = 1$. Villkoret blir

$$\sum_k d_k c_{k+2m} = \sum_{k=-n+1}^1 (-1)^k c_{1-k} c_{k+2m} = 0 \quad (2)$$

(verifiera!) Vi har således

$$\psi(x) = \sum_{k=-n+1}^1 (-1)^k c_{1-k} 2^{1/2} \phi(2x-k)$$

och ($q(0) = 0$)

$$\int \psi(x) dx = \mathcal{F}\psi(0) = \mathcal{F}\phi(0)q(0) = 0$$

Då $\phi = 1_{(0,1)}$ blir $\psi = 1_{(0,1/2)} - 1_{(1/2,1)}$ och kallas *Haar-funktionen*.
 Ortogonalitetsvillkoret ($|k| + |l| \neq 0$)

$$\int \psi(2^{-k}x - l)\psi(x) dx = 0$$

är således uppfyllt för $k = 0$.

Ortogonaliteten för $k = -1$ följer nu av

$$\int \psi(2x - l)\psi(x) dx = \sum_{m=-n+1}^1 (-1)^m c_{1-m} \int \psi(2x - l)\phi(2x - m) dx = 0$$

Här följer nu också ortogonaliteten för alla $k \neq 0$ på samma sätt.

5.2 Algoritmerna

Algoritmerna konstrueras med följande observation som grund. Ekvationerna (1) och (2) kan uppfattas som att matriserna L^*L och H^*H nedan representerar projektioner vars värden är ortogonala (mer om detta senare). Matriserna L och H innehåller således endast koefficienterna i polynomet p .³²

$$[L]_{ij} = c_{j-2i} \quad [H]_{ij} = (-1)^j c_{1+2i-j}$$

Om signalen som skall wavelet-transformeras har längden $N = 2^K$, väljer vi $0 \leq i \leq 2^{K-1} - 1$ och $0 \leq j \leq 2^K - 1$ i det första steget. För Haar-systemet, om $N = 2^2$ och signalen är kolonnvektorn $x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3]^*$ har vi

$$\begin{aligned} Lx &= 2^{-1/2}[x_0 + x_1 \ x_2 + x_3]^* \\ L^*Lx &= 1/2[x_0 + x_1 \ x_0 + x_1 \ x_2 + x_3 \ x_2 + x_3]^* \\ Hx &= 2^{-1/2}[x_0 - x_1 \ x_2 - x_3]^* \\ H^*Hx &= 1/2[x_0 - x_1 \ -x_0 + x_1 \ x_2 - x_3 \ -x_2 + x_3]^* \end{aligned}$$

Beteckningarna L och H skall erinra om *lågpass-* respektive *högpasfilter*; orsaken förklaras nedan.

Följande matrisvillkor är ekvivalenta med villkoren för polynomen p och q (vilka i sin tur är ekvivalenta med (1) och (2)).

$$HL^* = 0 \quad (\& \quad LH^* = 0) \quad (3)$$

$$LL^* = E \quad \& \quad HH^* = E \quad (4)$$

$$L^*L + H^*H = E \quad (5)$$

³² I översiktsartikeln av G Strang, Wavelets and dilation equations: a brief introduction, *SIAM Review* **31** (4), 1989, 614-627, har koefficientindex i definitionen av matrisen L felaktigt fått motsatt tecken. Matrisen H har blivit fel på motsvarande sätt. Detta innebär, givet rekurrenskvationen, att matriserna i artikeln hör till funktionerna $\phi(n-x)$ och $\psi(n-x)$.

Wavelet-analysen av signalen x innebär i steg 1 att beräkna Lx och Hx , vilka blir hälften så långa som x . Rekonstruktionens sista steg blir att beräkna L^*Lx och H^*Hx från Lx och Hx samt addera: $L^*Lx + H^*Hx = x$. Om signalens längd är $N = 2^K$ så blir analysen en upprepning K gånger av steg 1 på värdet av L i föregående steg; för rekonstruktionen gäller motsvarande.

Övning 5.2.1 Gör hela analysen ovan för $N = 2^2$ och jämför steg för steg med FFT.

Vektorn $x - L^*Lx = H^*Hx$ är projektionen på "högfrekvenskomponenten" av x , medan $x - H^*Hx = L^*Lx$ är projektionen på "lågfrekvenskomponenten." Komponenterna är ortogonala enligt (3):

$$H^*Hx(L^*Lx)^* = H^*Hxx^*L^*L = H^*HL^*Lxx^* = 0$$

Dessutom har vi från (4)

$$(H^*H)^2 = H^*HH^*H = H^*H \quad \& \quad (L^*L)^2 = L^*LL^*L = L^*L$$

d.v.s. H^*H och L^*L är projektioner.

Villkoret (5) innebär därför att vi kan dela varje vektor i ortogonala bitar: den ena med de låga frekvenserna den andra med de höga.

En naturlig fråga, som vi nu skall behandla, är:

Vad är sambandet mellan resultaten i stegen i algoritmen och den kontinuerliga signalens sampelvärden och wavelet-koefficienter?

Skriv den lågpasfilterade kontinuerliga signalen $x(t)$, med $\mathcal{F}x(s) = 0$ för $|s| \geq 1/2$ och där vi approximerat sampelvärdena $x(l)$ med 0 utanför heltalen $0, 1, 2, \dots, 2^K - 1$, som (index a som i *approximation*)

$$x_a = \text{sinc} * \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)\delta_l = \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)\text{sinc}(\cdot - l)$$

Utgångspunkten i analys-algoritmen är (index w som i *wavelet*)

$$x_w = \phi * \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)\delta_l = \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)\phi(\cdot - l)$$

Efter fourier-transformering har vi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}x_a(s) &= 1_{(-1/2, 1/2)}(s) \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)e^{-2\pi i sl} \\ \mathcal{F}x_w(s) &= \mathcal{F}\phi(s) \sum_{l=0}^{2^K-1} x(l)e^{-2\pi i sl} \end{aligned}$$

Tydligen kommer funktionen x_w att innehålla samma information som funktionen x_a precis då villkoret $\mathcal{F}\phi(s) \neq 0 \Leftrightarrow 1_{(-1/2, 1/2)}(s) \neq 0$ är uppfyllt.

ANMÄRKNING 1 Wavelet-analysen utförs alltså inte direkt på den lågpasfilterade ändligt approximerade signalen, utan först efter filtrering som tillför aliaseffekter om $\mathcal{F}\phi(s) \neq 0$ utanför $(-1/2, 1/2)$. Höga (låga) frekvenser kommer då att förefalla innehålla mer (mindre) energi än deras andel av energispektrum. Om $\mathcal{F}\phi(s)$ avtar långsamt mot 0 utanför $(-1/2, 1/2)$ blir denna inverkan tydlig. Önskar man undvika sådana effekter i analys-resultatet kan man filtrera detta eller också välja lämpligare funktion ϕ från början.

Övning 5.2.2 Visa att, i \mathcal{S}' ,

$$\sum_{l=0}^{2^K-1} x_l n \phi(n(\cdot - l)) \rightarrow \mathcal{F}\phi(0) \sum_{l=0}^{2^K-1} x_l \delta_l$$

Hur ser rekurrenskvationen ut om man byter $\phi(x)$ mot $n^{1/2}\phi(nx)$?

Vi antar alltså att funktionen ($x_l := x(l)$)

$$x_w = \sum_{l=0}^{2^K-1} x_l \phi(\cdot - l)$$

representerar (efter filtrering) den sedvanliga approximationen till ändligt många sampelvärden av den givna lågpasfilterade kontinuerliga signalen x .

För att förenkla beteckningarna använder vi i fortsättningen skalärprodukten i L^2

$$(f, g) := \int f(x)g(x)^* dx$$

och, t.ex.,

$$\phi_{k,l}(x) := 2^{-k/2} \phi(2^{-k}x - l)$$

Givet koefficienterna x_j , $j = 0, 1, 2, \dots, 2^K - 1$, vars samband med signalen x vi just diskuterat, har vi x_w som indata i analysen

$$x_w = \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j \phi_{0,j}$$

Wavelet-koefficienterna $a_{1,i}$ ges då av, enligt definitioner och ortogonalitet,

$$\begin{aligned} a_{1,i} &= (x_w, \psi_{1,i}) = \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j (\phi_{0,j}, \psi_{1,i}) \\ &= \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j \sum_{k=-n+1}^1 (-1)^k c_{1-k}(\phi_{0,j}, \phi_{0,2i+k}) \\ &= \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j (-1)^j c_{1+2i-j} \end{aligned}$$

Här har vi nu sett matrisen H i aktion. På motsvarande sätt verkar matrisen L :

$$\begin{aligned} b_{1,i} &= (x_w, \phi_{1,i}) = \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j (\phi_{0,j}, \phi_{1,i}) \\ &= \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j \sum_{k=0}^n c_k (\phi_{0,j}, \phi_{0,2i+k}) \\ &= \sum_{j=0}^{2^K-1} x_j c_{j-2i} \end{aligned}$$

Beteckningarna *hög-* och *lågpassfilter* motiveras med att $\mathcal{F}\psi(0) = 0$ respektive $\mathcal{F}\phi(0) \neq 0$ (båda är mer eller mindre lokaliserade kring 0) i likheten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}x_w &= \sum_{l=0}^{2^{K-1}-1} a_{1,l} \mathcal{F}\psi_{1,l} + \sum_{l=0}^{2^{K-1}-1} b_{1,l} \mathcal{F}\phi_{1,l} \\ &= 2\mathcal{F}\psi(2s) \sum_{l=0}^{2^{K-1}-1} a_{1,l} e^{-4\pi i l s} + 2\mathcal{F}\phi(2s) \sum_{l=0}^{2^{K-1}-1} b_{1,l} e^{-4\pi i l s} \end{aligned}$$

I Haar-systemet är $\mathcal{F}\phi(s) = e^{-\pi i s} \text{sinc } s$.

Övning 5.2.3 Visa att, i Haar-systemet,

$$\mathcal{F}\psi(s) = i 2^{-1/2} e^{-\pi i s/2} \sin(\pi s/2) \text{sinc}(s/2)$$

5.3 En skala av underrum

Låt ϕ och ψ vara som tidigare, och sätt V_0 som mängden av ändliga linjärkombinationer av heltalstranslat av ϕ , $\phi(x-k)$, och deras gränsvärden i L^2 .

Låt V_1 vara motsvarande med $2^{-1/2}\phi(2^{-1}x-k)$: dubbla skalan – därför är index 1 (> 0). Rekurrenskvationen ger $V_1 \subset V_0$. Enligt definitionen är också mängden W_1 av alla ändliga linjärkombinationer av heltalstranslaten $2^{-1/2}\psi(2^{-1}x-k)$, och deras gränsvärden i L^2 en delmängd av V_0 . Av likheterna (1) och (2) följer

$$V_0 = W_1 \oplus V_1 \quad \text{och} \quad W_1 \perp V_1$$

Med V_k och W_k som mängden ändliga linjärkombinationer av heltalstranslaten $2^{-k/2}\phi(2^{-k}x-l)$ respektive $2^{-k/2}\psi(2^{-k}x-l)$ och deras gränsvärden i L^2 har vi en skala av underrum i L^2 ,

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{k+1} \subset V_k \subset V_{k-1} \subset \dots \subset L^2$$

för alla heltal k , där

$$V_{k-1} = W_k \oplus V_k \quad \text{och} \quad W_k \perp V_k$$

Dessutom kan man visa att

$$\bigcup_k V_k = L^2 \quad \text{och} \quad \bigcap_k V_k = \{0\}$$

där gränzfunktionerna i L^2 också skall medräknas i unionen ("slutna höljet av unionen är L^2 ").

Vi låter P_k och Q_k beteckna de ortogonala projektionerna av V_{k-1} på V_k respektive W_k . Då blir $P_k + Q_k$ den identiska avbildningen på V_{k-1} .

I algoritmerna används likheten

$$V_0 = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_K \oplus V_K$$

samt projektionerna P_k och Q_k . Signalens längd är 2^K och den antas tillhöra V_0 . Algoritmen för analys innebär successiva projektioner på de ortogonala delrummen. Faktorn H i projektionen $Q_k = H^*H$ ger wavelet-koefficienterna som koefficienter i linjärkombinationen av $\psi(2^{-k}x - l)$, d.v.s. i skalan 2^k .

A Appendix

Vi ger här ett bevis av Struktursatsen (Sats 1.2) för tempererade distributioner. Ett precist resultat avslutar appendix.

Sats A.1 (Struktursatsen 1.2) Låt $T \in \mathcal{S}'$. Då finns kontinuerliga funktioner f_j , $j = 1, 2, \dots$, och icke-negativa heltal β_j så att (i \mathcal{S}')

$$T = \sum_{j=-\infty}^{\infty} D^{\beta_j} f_j$$

Beviset, som är något tekniskt, grundar sig på Lemma A.1.1 – 3 nedan, samt på ett resultat, som vi inte bevisar, ur integrationsteorin. (Ingen av dessa saker används i resten av kursen.)

Lemma A.1.1 Låt $T \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$ med $\varphi(x) = 0$ för $x \notin (a, b)$, som är ett ändligt intervall.

Då finns icke-negativt heltal β och en konstant C så att (för dessa φ)

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C \sup_x |D^\beta \varphi(x)|$$

Bevis av Lemma A.1.1: Anta motsatsen, d.v.s. att $\beta_n \rightarrow \infty$ och φ_n , $n = 1, 2, \dots$, finns så att

$$\sup_x |D^{\beta_n} \varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

men

$$| \langle T, \varphi_n \rangle | \geq 1$$

Det följer att $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} , ty, givet α, β , ta n så att $\beta_n \geq \beta$ och vi får

$$\begin{aligned} \sup_x (1 + |x|)^\alpha |D^\beta \varphi_n(x)| &\leq C_{a,b} \sup_x |D^\beta \varphi_n(x)| \\ &\leq C_{a,b} \sup_x |D^{\beta_n} \varphi_n(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

där den sista olikheten beror på att

$$|\varphi_n(x)| = \left| \int_a^x D\varphi_n(y) dy \right| \leq (b - a) \sup_x |D\varphi_n(x)|$$

Vi har nu en motsägelse: $\varphi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} och $| \langle T, \varphi_n \rangle | \geq 1$. Detta bevisar lemmat. □

Det minsta β som duger i Lemma A.1.1 kallas *ordningen* av T i (a, b) . Om ordningen är 0 sägs T vara ett (*tempererat*) *mått* i (a, b) .

Lemma A.1.2 Anta att DT har ordningen $\beta \geq 1$ i (a, b) . Då har T ordningen $\beta - 1$.

Bevis av Lemma A.1.2: Låt DT ha ordningen $\beta \geq 1$ i (a, b) och låt φ vara som i Lemma A.1.1. Vi visar att T då har ordning högst $\beta - 1$. Vi har

$$| \langle DT, \varphi \rangle | \leq C \sup_x |D^\beta \varphi(x)|$$

alltså

$$| \langle T, D\varphi \rangle | \leq C \sup_x |D^\beta \varphi(x)|$$

vilket är den önskade olikheten, fast bara på ett underrum givet av de funktioner som är derivator. Fixera nu φ_0 som i Lemma A.1.1 med $\int \varphi_0(x) dx = 1$. Med ψ som i Lemma A.1.1 gäller³³

$$\psi(x) = D\left\{ \int_a^x \psi(y) dy - \int_a^x \varphi_0(y) dy \int_a^b \psi(y) dy \right\} + \varphi_0(x) \int_a^b \psi(y) dy$$

vilket ger (verifiera att det som deriveras har önskade egenskaper!)

$$\begin{aligned} | \langle T, \psi \rangle | &\leq C \left\{ \sup_x |D^\beta \left(\int_a^x \psi(y) dy - \int_a^x \varphi_0(y) dy \int_a^b \psi(y) dy \right)| \right. \\ &\quad \left. + | \langle T, \varphi_0 \rangle \int_a^b \psi(y) dy | \right\} \\ &\leq C \left\{ \sup_x (|D^{\beta-1} \psi(x)| + |D^{\beta-1} \varphi_0(x)| \left| \int_a^b \psi(y) dy \right|) \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_a^b \psi(y) dy \right| \right\} \\ &\leq C \sup_x |D^{\beta-1} \psi(x)| \end{aligned}$$

där den sista olikheten fås som i beviset av Lemma A.1.1. Detta visar att ordningen av T är högst $\beta - 1$. Verifiera "minst"! Beviset är klart. □

Vi skall nu visa existensen av *primitiv distribution*.

Lemma A.1.3 Låt $T \in \mathcal{S}'$. Då finns $S \in \mathcal{S}'$ med $DS = T$.

Bevis av Lemma A.1.3: Om S finnes skulle vi ha ($\varphi \in \mathcal{S}$)

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle DS, \varphi \rangle = - \langle S, D\varphi \rangle$$

³³Jämför beviset av Fourier's Inversionsformel.

Denna ekvation definierar S på underrummet av derivator i \mathcal{S} . Med φ_0 som i beviset av Lemma A.1.2, skriver vi igen ($\psi \in \mathcal{S}$)

$$\psi(x) = D\left\{\int_{-\infty}^x \psi(y) dy - \int_{-\infty}^x \varphi_0(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy\right\} + \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy$$

Vi definierar $S(\varphi_0) = k$ och har nu S definierad på hela \mathcal{S} . Det återstår att visa att $\psi_n \rightarrow 0$ i \mathcal{S} medför $S(\psi_n) \rightarrow 0$, vilket görs som i Lemma A.1.1. (Verifiera att det som deriveras är i \mathcal{S} , och det sista påståendet!) □

Bevis av Sats 1.2: För att kunna använda Lemma A.1.1, där intervallet är begränsat, delar vi upp T i en summa.

Ta därför $\Psi \in \mathcal{S}$ sådan att $\Psi(x) > 0$ då $x \in (-1, 1)$, och med $\Psi(x) = 0$ annars. (Jfr. Exempel 1.1.2.) Sätt $\psi_n(x) = \Psi(x - n) / \sum_{\nu} \Psi(x - \nu)$ med n heltal. Detta är en *partition av enheten*, d.v.s. $\sum_n \psi_n = 1$ och $\psi_n \in \mathcal{S}$ (verifiera!).

Enligt Proposition 1.2.1 kan vi skriva $T = \sum_n \psi_n T$ i \mathcal{S}' (verifiera!). Varje term ger, för $\varphi \in \mathcal{S}$ med $\varphi(x) = 0$ utanför $(n - 1, n + 1)$, enligt Lemma A.1.1

$$\begin{aligned} |\langle \psi_n T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \psi_n \varphi \rangle| \\ &\leq C \sup_x |D^{\beta_n} \{\psi_n(x) \varphi(x)\}| \\ &\leq C \sup_x |D^{\beta_n} \varphi(x)| \end{aligned}$$

d.v.s. $\psi_n T$ har ordning β_n i $(n - 1, n + 1)$. Enligt Lemma A.1.2 och Lemma A.1.3 finns ett mått S_n med $D^{\beta_n} S_n = \psi_n T$. Vi citerar nu, utan bevis, ett resultat vars bevis kräver kunskap om lebesgueintegralen: *Varje mått är (i \mathcal{S}') andraderivatant av en kontinuerlig funktion.* Således finns en kontinuerlig funktion f_n med $D^{\beta_n+2} f_n = \psi_n T$ i \mathcal{S}' . Därmed har vi (med nya β_n två enheter större)

$$T = \sum_n D^{\beta_n} f_n$$

och beviset är klart. □

En precis karakterisering av tempererade distributioner följer nu.

Proposition A.1.1 *Låt $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$ vara linjär. Då är T en tempererad distribution om, och endast om, det finns en konstant C och heltal α, β så att ($\varphi \in \mathcal{S}$)*

$$|T(\varphi)| \leq C \sup_x \left[(1 + |x|)^\alpha \sum_{k \leq \beta} |D^k \varphi(x)| \right]$$

Bevis: Påståendet “om” följer direkt ur definitionen av tempererad distribution. Påståendet “endast om” följer av en enkel modifiering av beviset av Lemma A.1.1. (Verifiera!) □

Sakregister

- \mathcal{S} 1
- $\hat{f} = \mathcal{F}f$ 2
- \tilde{f} 3
- \mathcal{S}' 4
- δ 5
- δ_n 6
- H 7
- $\hat{T} = \mathcal{F}T$ 8
- \check{T} 8
- \star 22

- abeltransformen 28
- aliaseffekt 16
- autokorrelationsfunktion 22

- bandpassfiltrerad 17
- begynnelsevärdesproblem 19
- Bochner's Sats 24

- Centrala Gränsvärdesatsen 22

- datortomografi 27

- effektspektrum 20
- energipektrum 20
- energitäthet 20

- fourierserier 13
- fouriertransformen 2, 8

- Gibbs' Fenomen 27

- Haar-systemet 37
- Heaviside-funktionen 8

- kausal 18

- laplacetransformen 18

- multiplitera-och-addera 35
- mått (tempererat) 23, 44
 - begränsat 23
 - sannolikhets- 24
 - totalmassa 23

- Osäkerhetsrelationen 26
- ordning 44

- Paley-Wiener's Sats 17
- partition av enheten 46
- periodisk faltning 34
- Poisson's Summationsformel 11
- positiv 23
- positivt definit 23
- primitiv distribution 45

- radontransformen 28
- rampfunktionen 8

- sannolikhetsmått 23
- Samplingsatsen 15
- Schwartz' Sats 25
- spektralfaktorisering 20
- Struktursatsen 7, 44

- tempererad distribution 5
 - ordning 36
 - positiv 23
 - positivt definit 23
 - primitiv 37
- totalmassa 23

- z -transformen 33

- wavelet-transform 36
- ändliga delen 7