Projektkurs: optimeringslära TM, lp2 ht01

- Ca 3 föreläsningar/vecka under ca 4 veckor—mest om metoder
- Projekt: väljs om ca 2 veckor
  - Modell från artiklar eller egna idéer
  - Lösningsmetod bland dem som förelästs om
  - Presentera *synopsis* vid idé-seminarium v.47
  - Tillämpa metoden/algoritmen på modellen—implementera, lös *stora* problem
  - *Skriftlig rapport*: 5–10 sidor exkl. bilagor, diagram m.m.
  - v.50: Återsamling med *muntlig redovisning och opposition*
- Litteraturlista—kommer snart
- Separat lista med projekt-idé-artiklar—kommer snart
- Överbetyg (4, 5, VG): muntlig tentamen

Introduktionsföreläsning

Ett exempel på hur man kan använda matematisk kreativitet och utnyttja flera olika optimeringstekniker för att lösa ett linjärt, strukturerat optimeringsproblem med blandade 0/1- och kontinuerliga variabler:

- Lagrange-relaxering
- variabel-substitution
- Benders dekomposition
- heuristiker
- branch & bound
- greedy-algoritmer
- subgradient-optimering

Lokalisering av anläggningar som skall serva kunder

- Potentiella depåer: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ (olika geografiska platser)
- Existerande kunder: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, m\}$ (olika geografiska platser)

$f_j =$ fast kostnad att använda depå j

$c_{ij} =$ transportkostn. då hela kund i's efterfrågan tillgodoses av depå j

Beslutsproblem:

- Vilka depåer skall öppnas?
- Vilka depåer skall serva vilka kunder och hur mycket?
- **Mål:** minimera kostnader
- **Antagande:** depåerna har obegränsad kapacitet (detta antagande ska vi senare ta bort)

Beslutsvariabler:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{om depå } j \text{ används (byggs)} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

x_{ij} = andelen av kund i's efterfrågan som levereras från depå j

Uncapacitated facility location (UFL)

$$\begin{array}{llllll}
z_0^* = \min & \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j & & & & (0) \\
\text{då} & \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{ij} & = & 1 & i\in\mathcal{I} & (1) \\
& x_{ij} - y_j & \leq & 0 & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (2) \\
& x_{ij} & \in & [0,1] & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (3) \\
& y_j & \in & \{0,1\} & j\in\mathcal{J} & (4)
\end{array}$$

(0) Minimera kostnader

(1) Leverera exakt efterfrågan

(2) Leverera endast från öppen depå

(3) x motsvarar andel av efterfrågan

(4) öppna endast hela depåer

Antag att depåer har begränsad kapacitet

$d_i =$ efterfrågan hos kund i ($D = \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i$)

$b_j =$ kapacitet hos depå j—ifall den öppnas

Bivillkor:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} \leq b_j y_j, \quad j\in\mathcal{J} \quad (5) \qquad (\Rightarrow x_{ij} \leq y_j,\ \forall i,j)$$

$\Rightarrow$ Byt ut (2) mot (5)

Capacitated facility location (CFL)

$$\begin{array}{llllll}
z^* = \min & \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j & & & & (0) \\
\text{då} & \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{ij} & = & 1 & i\in\mathcal{I} & (1) \\
& \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} - b_j y_j & \leq & 0 & j\in\mathcal{J} & (5) \\
& x_{ij} & \in & [0,1] & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (3) \\
& y_j & \in & \{0,1\} & j\in\mathcal{J} & (4)
\end{array}$$

Observation: Sammanlagda kapaciteten hos öppnade depåer måste täcka all efterfrågan $\Rightarrow$ ett extra (redundant) bivillkor:

$$(1),(5) \Rightarrow \overbrace{\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j y_j}^{kapacitet} \geq \sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i \sum_{j\in\mathcal{J}} x_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{I}} d_i \cdot 1 = \overbrace{D}^{efterfr.}$$

Trick: Byt ut x_{ij} mot w_{ij} i bivillkoren (1) och i "halva" målfunktionen, lägg till bivillkoren $x_{ij} = w_{ij}$, samt låt $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\begin{array}{lllll}
z^* = \min & \alpha\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}x_{ij} + (1-\alpha)\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} c_{ij}w_{ij} + \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j & & & \\
\text{då} \quad \sum_{j\in\mathcal{J}} w_{ij} & = & 1 & i\in\mathcal{I} & (1) \\
\sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} - b_j y_j & \leq & 0 & j\in\mathcal{J} & (5) \\
\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j y_j & \geq & D & & (6) \\
w_{ij} - x_{ij} & = & 0 & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (7) \\
x_{ij} & \in & [0,1] & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (3) \\
w_{ij} & \geq & 0 & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (8) \\
y_j & \in & \{0,1\} & j\in\mathcal{J} & (4)
\end{array}$$

- Bivillkoren (7) knyter ihop (x,y)-delen med w-delen.
- Lagrange-relaxera dessa med multiplikatorer λ_{ij}

$\Rightarrow$ Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(x,w,y,\lambda) =$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left[\alpha c_{ij}x_{ij} + (1-\alpha)c_{ij}w_{ij} + \overbrace{\lambda_{ij}(w_{ij} - x_{ij})}^{\text{straff}}\right] + \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} (\alpha c_{ij} - \lambda_{ij})x_{ij} + \sum_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j + \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} [(1-\alpha)c_{ij} + \lambda_{ij}]\, w_{ij}$$

- Subproblem (för fixt värde på λ):
  Minimera Lagrange-funktionen under bivillkoren (1), (5), (6), (3), (8) & (4).
  Separerar i ett (x,y)-problem och $|\mathcal{I}|$ stycken w-problem

9

Subproblem i x- och y-variabler:

$$
\begin{array}{rlll}
z_{xy}(\lambda) = \min\limits_{x,y} & \sum\limits_{i\in\mathcal{I}}\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} [\alpha c_{ij} - \lambda_{ij}]\, x_{ij} + \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} f_j y_j & & \\
\text{då} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} b_j y_j \geq D & & (6)\\
& \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} \leq b_j y_j & j\in\mathcal{J} & (5)\\
& x_{ij} \in [0,1] & i\in\mathcal{I}, j\in\mathcal{J} & (3)\\
& y_j \in \{0,1\} & j\in\mathcal{J} & (4)
\end{array}
$$

För varje given y-lösning (sådan att $\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j y_j \geq D$) gäller:

- Om $y_j = 0$ så är $x_{ij} = 0$, $i \in \mathcal{I}$
- Om $y_j = 1$ så gäller $\sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} \leq b_j$

10

Värdet (i (x, y)-subproblemet) av att öppna depå j

Alltså: att sätta $y_j = 1$ ($|\mathcal{J}|$ stycken kontinuerliga kappsäcksproblem)

$$
\begin{array}{lll}
[\text{KKSP}_j] & v_j(\lambda) = f_j + \min & \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} [\alpha c_{ij} - \lambda_{ij}]\, x_{ij} \\
& \text{då} & \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} \leq b_j \\
& & x_{ij} \in [0,1] \qquad i \in \mathcal{I}
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ **Projektion på y-rummet** (ett 0/1-kappsäcksproblem)

$$
\begin{array}{lll}
[0/1\text{-KSP}] & z_{xy}(\lambda) = \min\limits_{y} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} v_j(\lambda)\cdot y_j \\
& \text{då} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} b_j y_j \geq D \\
& & y_j \in \{0,1\} \quad j \in \mathcal{J}
\end{array}
$$

11

Lösning av kontinuerliga kappsäcksprobl. [KKSP$_j$]

- Sortera $\frac{\alpha c_{ij} - \lambda_{ij}}{d_i} < 0$, $i \in \mathcal{I}$, i stigande ordning

$\Rightarrow$ index $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $m \leq |\mathcal{I}|$.

- Om $m = 0$ så $x_{ij} = 0$, $i \in \mathcal{I}$. Annars låt $k = 1$ och:
- Sätt $x_{i_k j} = \min\{1; b_j - \sum_{s=1}^{k-1} d_i x_{i_s j}\}$ och låt $k = k + 1$ tills $\sum_{s=1}^{k} d_i x_{i_s j} = b_j$ eller $k = m$.
- Lösningen uppfyller $\sum_{i\in\mathcal{I}} d_i x_{ij} = b_j$ och $x_{ij} \in [0, 1]$, $i \in \mathcal{I}$
- $v_j(\lambda) = f_j + \min \sum_{k=1}^{|\mathcal{I}|} \sum_{j\in\mathcal{J}} [\alpha c_{i_k j} - \lambda_{i_k j}]\, x_{i_k j}$

Lösning av 0/1-kappsäcksproblem

Kan *ej* lösas i polynomisk tid. Lös med t.ex. Branch & bound (Cplex).

Lösning: $y_j(\lambda) \in \{0, 1\}$, $j \in \mathcal{J}$.

. $x_{ij}(\lambda) = 0$, $i \in \mathcal{I}$, om $y_j(\lambda) = 0$.

. $x_{ij}(\lambda) = x_{ij}$ enligt ovan, $i \in \mathcal{I}$, om $y_j(\lambda) = 1$.

12

Subproblem i w-variabler ($|\mathcal{I}|$ stycken halvtillordningsproblem):

$$
[\text{AP}] \qquad z_w(\lambda) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{w} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} [(1-\alpha)c_{ij} + \lambda_{ij}]\, w_{ij} \\ \text{då} & \sum\limits_{j\in\mathcal{J}} w_{ij} = 1, \quad w_{ij} \geq 0 \quad j \in \mathcal{J} \end{array} \right]
$$

Lösning av halvtillordningsproblem i

(specialfall av [KKSP]):

- Finn ℓ_i sådant att $(1-\alpha)c_{i\ell_i} + \lambda_{i\ell_i} = \min\limits_{j\in\mathcal{J}}\{(1-\alpha)c_{ij} + \lambda_{ij}\}$
- Låt $w_{i\ell_i}(\lambda) = 1$, $w_{ij}(\lambda) = 0$, $j \neq \ell_i$

13

Värdet hos det relaxerade problemet för ett fixt värde på λ

$$
z(\lambda) = \underbrace{z_{xy}(\lambda)}_{\text{svårare att lösa}} + \underbrace{z_w(\lambda)}_{\text{lättlöst}}
$$

- Man kan visa att $z(\lambda) \leq z^*$ för alla $\lambda \in \Re^{|\mathcal{I}|\times|\mathcal{J}|}$ (svag dualitet)
- λ_{ij} är straffet för att bryta mot bivillkoret $w_{ij} = x_{ij}$
- Finn bästa möjliga underskattningen av z^* $\Leftrightarrow$ finn "optimala" värden på straffen λ_{ij}
- Alltså: $\max\limits_{\lambda\in\Re^{|\mathcal{I}|\times|\mathcal{J}|}} z(\lambda) \leq z^*$ (oftast gäller $\max\limits_{\lambda\in\Re^{|\mathcal{I}|\times|\mathcal{J}|}} z(\lambda) < z^*$)

14

Hur finner man bättre värden på λ_{ij}?

Straff: $\min \ldots \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_{ij}(w_{ij} - x_{ij})$

- Om $w_{ij}(\lambda) > x_{ij}(\lambda) \Rightarrow$ Öka värdet på λ_{ij} (det blir dyrare att bryta mot bivillkoret)
- Om $w_{ij}(\lambda) < x_{ij}(\lambda) \Rightarrow$ Minska värdet på λ_{ij} (det blir dyrare att bryta mot bivillkoret)
- Iterativ metod (subgradient-algoritm) för att finna optimala straff λ^*:

$$
\lambda_{ij}^{t+1} = \lambda_{ij}^{t} + \rho_t \left[w_{ij}(\lambda^t) - x_{ij}(\lambda^t) \right], \qquad t = 0, 1, \ldots
$$

där $\rho_t > 0$ är steglängd, minskar successivt

- Använd *heuristik* för att utifrån varje lösning $[x(\lambda^t), w(\lambda^t), y(\lambda^t)]$ finna en *tillåten lösning* till CFL (öppna fler depåer, skicka endast från öppna depåer, $x = w, \ldots$)

15

Exempel: $|\mathcal{I}| = 4$, $|\mathcal{J}| = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$

$$
(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 16 & 2 & 6 \\ 10 & 12 & 4 \end{bmatrix}, (f_j) = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}, (d_i) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, (b_j) = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ll}
z_{xy}(\lambda) = \min & \sum_{j=1}^{3} v_j(\lambda)\cdot y_j \\
\text{då} & 12y_1 + 10y_2 + 13y_3 \geq 23 \\
& y \in \{0,1\}^3
\end{array}
\qquad \text{Låt}(\lambda_{ij}^t) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\underbrace{\ldots \Rightarrow \ldots}_{\text{(se nästa sida)}} \quad \begin{array}{ll} z_{xy}(\lambda) = \min & 5y_1 + 8.875y_2 + 18y_3 \\ \text{då} & 12y_1 + 10y_2 + 13y_3 \geq 23, \quad y \in \{0,1\}^3 \end{array}
$$

16

$$
\begin{array}{lll}
v_1(\lambda^t) = 11 + & \min & -4x_{11} - 2x_{21} + 3x_{31} + 5x_{41} \\
& \text{då} & 6x_{11} + 4x_{21} + 8x_{31} + 5x_{41} \leq 12, \quad x_{\cdot 1} \in [0,1]^4 \\
& \Rightarrow & x_{11} = x_{21} = 1,\ x_{31} = x_{41} = 0, \quad v_1(\lambda^t) = 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
v_2(\lambda^t) = 16 + & \min & x_{12} - 6x_{22} - x_{32} - x_{42} \\
& \text{då} & 6x_{12} + 4x_{22} + 8x_{32} + 5x_{42} \leq 10, \quad x_{\cdot 2} \in [0,1]^4 \\
& \Rightarrow & x_{22} = x_{42} = 1,\ x_{32} = \frac{1}{8},\ x_{12} = 0, \quad v_2(\lambda^t) = 8.875
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
v_3(\lambda^t) = 21 + & \min & 2x_{13} + 0x_{23} + 3x_{33} - 3x_{43} \\
& \text{då} & 6x_{13} + 4x_{23} + 8x_{33} + 5x_{43} \leq 13, \quad x_{\cdot 3} \in [0,1]^4 \\
& \Rightarrow & x_{23} = x_{43} = 1,\ x_{13} = x_{33} = 0, \quad v_3(\lambda^t) = 18
\end{array}
$$

Lösning till (x, y)-problemet för $\lambda = \lambda^t$

$$y(\lambda^t) = (1,0,1),\ x(\lambda^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ z_{xy}(\lambda^t) = 5 + 0 + 18 = 23$$

w-problemet separerar i ett problem för varje kund i

$z_w(\lambda^t) = \sum_{i=1}^4 z_w^i(\lambda^t)$ där $\quad (1-\alpha = \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} z_w^i(\lambda^t) = \min \quad & \sum_{j=1}^3 \left[(1-\alpha)c_{ij} + \lambda_{ij}^t\right] w_{ij} \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^3 w_{ij} = 1, \quad w_{ij} \geq 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll} z_w^1(\lambda^t) = & \min & 10w_{11} + w_{12} + 2w_{13} \\ & \text{då} & w_{11} + w_{12} + w_{13} = 1, \quad w_{1j} \geq 0,\ j = 1,2,3 \\ \Rightarrow & & w_{12}(\lambda^t) = 1,\ w_{11}(\lambda^t) = w_{13}(\lambda^t) = 0,\ z_w^1(\lambda^t) = 1 \\ \hline z_w^2(\lambda^t) = & \min & 4w_{21} + 14w_{22} + 4w_{23} \\ & \text{då} & w_{21} + w_{22} + w_{23} = 1, \quad w_{2j} \geq 0,\ j = 1,2,3 \\ \Rightarrow & & w_{21}(\lambda^t) = 1,\ w_{22}(\lambda^t) = w_{23}(\lambda^t) = 0,\ z_w^2(\lambda^t) = 4 \\ \hline z_w^3(\lambda^t) = & \min & 13w_{31} + 3w_{32} + 3w_{33} \\ & \text{då} & w_{31} + w_{32} + w_{33} = 1, \quad w_{3j} \geq 0,\ j = 1,2,3 \\ \Rightarrow & & w_{32}(\lambda^t) = w_{33}(\lambda^t) = \dfrac{1}{2},\ w_{31}(\lambda^t) = 0,\ z_w^3(\lambda^t) = 3 \\ \hline z_w^4(\lambda^t) = & \min & 5w_{41} + 13w_{42} + 7w_{43} \\ & \text{då} & w_{41} + w_{42} + w_{43} = 1, \quad w_{4j} \geq 0,\ j = 1,2,3 \\ \Rightarrow & & w_{41}(\lambda^t) = 1,\ w_{42}(\lambda^t) = w_{43}(\lambda^t) = 0,\ z_w^4(\lambda^t) = 5 \end{array}$$

Lösning till w-problemet

$$w(\lambda^t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ z_w(\lambda^t) = 13, \quad \begin{array}{l} z(\lambda^t) = z_{xy}(\lambda^t) + z_w(\lambda^t) = 35 \\ \Rightarrow z^* \geq 35 \end{array}$$

Ny λ-punkt (t.ex. $\rho_t = 8$):

$$\begin{aligned} \lambda^{t+1} &= \lambda^t + \rho_t \left[w(\lambda^t) - x(\lambda^t)\right] \\ &= \begin{bmatrix} 7-\rho_t & \rho_t & 0 \\ 3 & 10 & 2-\rho_t \\ 5 & 2+\frac{\rho_t}{2} & \frac{\rho_t}{2} \\ \rho_t & 7 & 5-\rho_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 3 & 10 & -6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tillåten lösning $\Leftrightarrow x(\lambda^t) = w(\lambda^t)$? Nej $\Rightarrow$ Heuristik

Idé: Öppna de depåer som ges av lösningen $y(\lambda^t) \Rightarrow$
$y^H = y(\lambda^t) = (1,0,1)$.
Skicka endast från öppna depåer ($y_j^H = 0 \Rightarrow x_{ij}^H = 0, \forall i$).
Tillgodose efterfrågan och överskrid inte depåernas kapacitet:

$$\text{Låt } x^H = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$z^H = 6 \cdot \frac{7}{12} + 4 \cdot \frac{5}{12} + 2 + 6 + 10 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 11 + 21 = 52 + \frac{1}{6}$
$\Rightarrow z^* \in [35, 52 + \frac{1}{6}] = [z(\lambda^t), z^H]$ (inget vidare bra intervall)

- Val av steglängder (ρ_t) kommer senare i kursen (subgradient-optimering, konvergens mot optimalt värde på λ)
- Tillåtenhets-heuristiker kan göras mer eller mindre sofistikerade
- Det finns flera sätt att Lagrange-relaxera *kontinuerliga* bivillkor i ett optimeringsproblem
- T.ex. Lagrange-relaxera bivillkoren (1) *eller* (5)
  (med multiplikatorer $\mu_i \in \Re$ resp. $\nu_j \in \Re_+$) i den ursprungliga formuleringen (CFL)