Lagrangedualitet

$$\text{[P]} \quad v^* = \min \; f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad G_i(x) \le 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad (1) \quad \text{komplicerande}$$
$$x \in X \quad (2) \quad \text{lätta}$$

- f och G_i, $i = 1, \ldots, m$ är kontinuerliga funktioner från $\Re^n$ till $\Re$
- X är en icke-tom (eventuellt diskret) delmängd av $\Re^n$

(1) är explicita bivillkor

(2) är implicita bivillkor

- Om (1) inte var med så vore problemet "lätt" att lösa
- Indelningen av bivillkoren i grupperna (1) och (2) kan göras på olika sätt

Lagrangerelaxering

- Förenkla [P] genom att "relaxera" (1) från bivillkoren
- Addera funktionerna $G_i(x)$ till målfunktionen, multiplicerade med icke-negativa multiplikatorer, u_i
- Straff för att bryta mot bivillkoren $G_i(x) \le 0$

Lagrangefunktionen

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i G_i(x) = f(x) + u^T G(x)$$

Lagrangeduala subproblemet

$$[\mathrm{L_{sub}}] \quad g(u) = \min_{x \in X} L(x, u) = L(x(u), u), \qquad \text{där } x(u) \in X(u) \subseteq X$$

Idé: lös $[\mathrm{L_{sub}}]$ för olika värden på $u \ge 0$

- Försök finna en lösning till [P]
- Kandidater till optimallösning x^* fås från lösningar $x(u) \in X(u)$ till subproblemet
- Hur finna lämpliga värden på multiplikatorerna, $u^1, u^2, \ldots$?
- Löser sekvensen $\{x(u^k)\}$ det ursprungliga problemet?
- Hur förhåller sig $g(u)$ till $f(x)$?

Sadelpunkter

Definition: Punkten (x^*, u^*) är en sadelpunkt till L om

(i) $x^* \in X$ och $u^* \ge 0$

(ii) $L(x^*, u) \le L(x^*, u^*) \le L(x, u^*)$ för alla $x \in X$ och $u \ge 0$

- L antar sitt minimum över (första argumentet) X i x^*
- L antar sitt maximum över (andra argumentet) $\Re^m_+$ i u^*
- Det existerar inte säkert en sadelpunkt, även om x^* och u^* existerar

Sadelpunktssatsen: Om (x^*, u^*) är en sadelpunkt till L så är x^* global optimallösning till [P].

Sök minimum (maximum) av L m.a.p. x (u)

$$\max_{u \ge 0} \; \min_{x \in X} \; L(x, u)$$

- Tvåstegsförfarande
- Definiera för varje värde på u den *Lagrangeduala funktionen*

$$g(u) = \min_{x \in X} L(x, u)$$

- Maximera g över $u \ge 0$ genom att lösa det *Lagrangeduala problemet*

$$[D] \qquad v_L = \max_{u \ge 0} g(u)$$

- *Obs!* $g(\bar{u})$ beräknas genom att man löser $[\mathrm{L_{sub}}]$ för $u = \bar{u}$
- $g(u)$ är sällan möjlig att teckna explicit!

Svag dualitet: $g(u) \le v^*$ för alla $u \ge 0$

Bevis: Låt $u \ge 0$. $g(u) = \min_{x \in X} \{f(x) + u^T G(x)\} \le f(\bar{x}) + u^T G(\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in X$. Speciellt gäller att $x^* \in X$ och $G(x^*) \le 0$. Detta medför att $g(u) \le \underbrace{f(x^*)}_{=v^*} + \underbrace{u^T}_{\ge 0} \underbrace{G(x^*)}_{\le 0} \le v^*$

Följdsats: $v_L = \max_{u \ge 0} g(u) \le v^*$

(dualens målfunktion underskattar primalens)

$f(x) \quad [x \in X,\ G(x) \le 0]$

$= 0?$ $v^* = f(x^*)$

$v_L = g(u^*)$

$g(u) \quad [u \ge 0]$

Exempel 1 (explicit dual) ($x^* = (2, 2), v^* = 8$)

$$\text{[P]} \quad v^* = \min \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{då} \quad G_1(x) = -x_1 - x_2 + 4 \;\le\; 0, \quad x_1, x_2 \ge 0$$

Låt $X = \{x \in \Re^2 \mid x_1,\ x_2 \ge 0\} = \Re^2_+$

$$\begin{aligned} g(u) &= \min_{x \in X} \{x_1^2 + x_2^2 + u \cdot (-x_1 - x_2 + 4)\} \qquad (u^* = 4) \\ &= 4u + \min_{x \in X} \{x_1^2 + x_2^2 - ux_1 - ux_2\} \\ &= 4u + \min_{x_1 \ge 0} \{x_1^2 - ux_1\} + \min_{x_2 \ge 0} \{x_2^2 - ux_2\} \end{aligned}$$

För ett fixt värde på $u \ge 0$ antas $\min_{x \in X} L(x, u)$ i $x_1(u) = \frac{u}{2}$, $x_2(u) = \frac{u}{2}$

Insättning ger: $g(u) = L(x(u), u) = \ldots = 4u - \frac{u^2}{2}$ för alla $u \ge 0$

g är konkav och differentierbar, $\quad v^* = f(x^*) = 8 = v_L, \quad x(u^*) = x^*$

Exempel 2 ($x^* = (0, 1, 1)$, $v^* = 17$)

$$\text{[P]} \quad v^* = \min \quad f(x) = 3x_1 + 7x_2 + 10x_3$$
$$\text{då} \quad x_1 + 3x_2 + 5x_3 \;\ge\; 7$$
$$x_j \;\in\; \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3$$

Låt $X = \{x \in \Re^3 \mid x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, 3\} = B^3$

$$\begin{aligned} g(u) &= 7u + \min_{x \in X} \{(3 - u)x_1 + (7 - 3u)x_2 + (10 - 5u)x_3\} \\ &= 7u + \min_{x_1 \in \{0,1\}} \{(3 - u)x_1\} + \min_{x_2 \in \{0,1\}} \{(7 - 3u)x_2\} \\ &\quad + \min_{x_3 \in \{0,1\}} \{(10 - 5u)x_3\} \end{aligned}$$

$X(u)$ fås genom att sätta $x_j(u) = 1(0)$ då koefficienten är $<$ $(\ge)0$

Subproblemlösning

$u \in$	$x_1(u)$	$x_2(u)$	$x_3(u)$
$[-\infty, 2]$	0	0	0
$[2, \frac{7}{3}]$	0	0	1
$[\frac{7}{3}, 3]$	0	1	1
$[3, \infty]$	1	1	1

$$g(u) = \begin{cases} 7u & u \in [-\infty, 2] \\ 2u + 10 & u \in [2, \frac{7}{3}] \\ -u + 17 & u \in [\frac{7}{3}, 3] \\ -2u + 20 & u \in [3, \infty] \end{cases}$$

- g är konkav, icke-differentierbar i brytpunkterna $u \in \{2, \frac{7}{3}, 3\}$
- $u^* = \frac{7}{3}$, $v_L = g(u^*) = \frac{44}{3} = 14\frac{2}{3}$
- $X(u^*) = \{(0,0,1), (0,1,1)\} \ni x^*$
- Dualitetsgap: $v_L < v^*$

Exempel 3 ($x^* = (2,1)$, $v^* = -3$)

$$\begin{aligned} [\mathrm{P}] \quad v^* = \min \quad & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & x \in X = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\} \end{aligned}$$

$L(x,u) = -3u + (-2+u)x_1 + (1+u)x_2$ (OBS! $u \in \Re$)

$$X(u) = \begin{cases} \{(4,4)\} & u < -1 \\ \{(4,4),(4,0)\} & u = -1 \\ \{(4,0)\} & u \in (-1,2) \\ \{(4,0),(0,0)\} & u = 2 \\ \{(0,0)\} & u > 2 \end{cases}, \quad g(u) = \begin{cases} -4 + 5u & u \le -1 \\ -8 + u & u \in [-1, 2] \\ -3u & u \ge 2 \end{cases}$$

$u^* = 2$, $v_L = g(u^*) = -6$, $v_L < v^*$, $x^* \notin X(u^*)$ ($\not\ni$ tillåten lösning)

Starka dualsatsen

Följande tre påståenden (a–c) är ekvivalenta

(a) $(\bar{x}, \bar{u})$ är en sadelpunkt till L

(b) i. $f(\bar{x}) + \bar{u}^T G(\bar{x}) = \min_{x \in X} \{f(x) + \bar{u}^T G(x)\}$ $[\Leftrightarrow \bar{x} \in X(\bar{u})]$

ii. $\bar{u}^T G(\bar{x}) = 0$

iii. $G(\bar{x}) \le 0$

(c) $v^* = f(\bar{x}) = g(\bar{u}) = v_L$

$\Rightarrow$ Metod för att finna en optimallösning:

1) Lös [D] $\Rightarrow u^*$

2) Finn en lösning $x^* \in X$ som uppfyller (b)

- När fungerar detta?

Starka dualsatsen, konvexa fallet

Antag att f och G_i, $i = 1, \ldots, m$, är konvexa funktioner, X är icke-tom och konvex, samt att det existerar en punkt $\bar{x} \in X$ med $G_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$ (inre punkt CQ). Antag också att både [P] och [D] har begränsade optimallösningar. Då gäller att $v^* = v_L$.

Obs! Inre punkt CQ (constraint qualification) kan bytas mot något annat CQ. Ett sådant uppfylls automatiskt om t.ex. G_i är linjära och X är en polyeder. I detta fall generaliserar ovanstående sats starka dualsatsen för LP.

Låt u^* lösa [D]. Då kan mängden av primala optimallösningar skrivas:

$$X^* = X(u^*) \cap \{x \in \Re^n \mid (u^*)^T G(x) = 0,\ G(x) \le 0\}$$

Styrbarhet

Att den duala optimallösningen u^* ger en primal optimallösning x^* som den unika lösningen $x(u^*)$ till $\min_{x \in X} L(x, u^*)$ brukar kallas för dualens *styrbarhet*.

Exempel 1: (f strikt konvex)
$u^* = 4$, i. $\Rightarrow x(u^*) = (2,2)$. Eftersom $X(u^*) = x(u^*)$ är entydig följer av starka dualsatsen (konvexa fallet) att $x^* = x(u^*)$.
Kontroll: ii. $4 \cdot (-2 - 2 + 4) = 0$. iii. $G_i(x^*) = 0$.

Exempel 4 (LP) ($x^* = (\frac{3}{2}, 0), v^* = -\frac{3}{2}$)

$$\begin{aligned} [\mathrm{P}] \quad v^* = \min \quad & f(x) = -x_1 - x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 4x_2 \le 3 \\ & 0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1 \end{aligned}$$

$$L(x,u) = -x_1 - x_2 + u(2x_1 + 4x_2 - 3)$$

$$g(u) = \begin{cases} -3 + 5u & u \in [-\infty, \frac{1}{4}] \\ -2 + u & u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -3u & u \in [\frac{1}{2}, \infty] \end{cases}, \quad u^* = \frac{1}{2}, \quad v_L = -\frac{3}{2} = v^*$$

Lös ut x^* ur i.–iii.:
i. $\Rightarrow X(u^*) = \{(2\lambda, 0) \mid 0 \le \lambda \le 1\}$
iii. $\Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + 4 \cdot 0 \le 3 \Rightarrow \lambda \le \frac{3}{4}$
ii. $\Rightarrow u^* \cdot G_1(x^*) = \frac{1}{2} \cdot (4\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow x^* = (\frac{3}{2}, 0) \in X(u^*)$

Icke-styrbarhet

- Att $x^* \in X(u^*)$ men inte ges unikt kallas *icke-styrbarhet.*
- Svårt att finna x^* i dessa fall, ty en metod för att lösa subproblemet ger oftast bara *en* punkt i $X(u^*)$ och det behöver inte vara just x^*.
- Icke styrbarhet kan avhjälpas genom att införa icke-linjära (t.ex. kvadratiska) funktioner av G_i i målfunktionen ($\Rightarrow$ utvidgad Lagrange-funktion)
- Även *ergodiska* sekvenser av subproblem-lösningar (senare i kursen)
- Vi har också behov av en *primal heuristik*, d.v.s. en procedur för att hitta en (bra) tillåten lösning till [P] utgående från en subproblemlösning $\bar{x} \in X(\bar{u})$

Egenskaper hos den duala funktionen g

Sats:
Antag att f och G_i, $i = 1, \ldots, m$, är kontinuerliga funktioner och att $X \subset \Re^n$ är icke-tom, sluten och begränsad. Då är g *ändlig* och *konkav.*

Sats:
g är differentierbar i $u = \bar{u} \Leftrightarrow G(\bar{x})$ är konstant för alla $\bar{x} \in X(\bar{u}) \Rightarrow \nabla g(\bar{u}) = G(\bar{x})$

Följdsats:
Om $X(\bar{u})$ består av en punkt (d.v.s. $[\mathrm{L_{sub}}]$ har en unik lösning $x(\bar{u})$) så är g differentierbar i $u = \bar{u}$ och $\nabla g(\bar{u}) = G(x(\bar{u}))$.
(Exempel 1, t.ex.)