Kolumngenerering

Ett LP med väldigt många variabler $c_j, x_j \in \Re$, $\mathbf{a}_j, \mathbf{b} \in \Re^m$, $m << n$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b} \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Matrisen $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är för stor att lagra i primärminnet

Antag att antalet bivillkor är relativt litet
$\Rightarrow$ en basmatris (simplex-metoden) är inte alltför stor $(m \times m)$

Tillåtna baslösningar

$B = \{m$ st element ur mängden $\{1, \ldots, n\}\}$ är en bas om den motsvarande matrisen $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_j)_{j \in B}$ är inverterbar

En baslösning ges av $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ och $x_j = 0$, $j \notin B$

En bättre tillåten baslösning kan vi finna genom att beräkna reducerade kostnader: $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ för $j \notin B$

Låt $\bar{c}_s = \min_{j \notin B} \bar{c}_j$

Om $\bar{c}_s < 0 \Rightarrow$ en bättre lösning erhålls om x_s ingår i basen

Om $\bar{c}_s \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}_B$ är en optimal baslösning

Antag att kolumnerna $\mathbf{a}_j$ definieras av en mängd
$S = \{\mathbf{a}_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ som t.ex. är lösningar till ett ekvationssystem (extrempunkter, heltalspunkter, ...)

Den inkommande kolumnen kan då väljas genom att man löser ett "subproblem":

$$\text{Låt } c(\mathbf{a}_j) = c_j$$
$$\bar{c}(\mathbf{a}(B)) = \min_{\mathbf{a} \in S} \{c(\mathbf{a}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}\}$$

$\mathbf{a}(B)$ är den kolumn som har lägst reducerad kostnad m.a.p. basen B

Om $\bar{c}(\mathbf{a}(B)) < 0$ så låt kolumnen $\begin{pmatrix} c(\mathbf{a}(B)) \\ \mathbf{a}(B) \end{pmatrix}$ ingå i problemet

Exempel: Kapningsproblem (cutting stock)

Tillgång: brädor av längd L
Efterfrågan: b_i st brädbitar av längd $\ell_i < L$, $i = 1, \ldots, m$
Mål: minimera antalet brädor som åtgår för att producera bitarna
Kapningsmönster nr j innehåller a_{ij} st bitar av längd ℓ_i, $\forall i$
Tillåtet mönster om $\sum_{i=1}^m \ell_i a_{ij} \leq L$ där $a_{ij} \geq 0$ & heltal $\forall i$
Variabler: x_j = antal gånger som mönster j används
n = totalt antal möjliga kapningsmönster — mycket stort heltal

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \text{ (heltal)} \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Startlösning och nya kolumner

Startkolumner, triviala: m st enhetskolumner (ger massor av spill) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{m} x_j \\ \text{då} \quad & x_j = b_j, \quad j = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Generera bättre mönster (heltals-kappsäcksproblem): $\Rightarrow$ ny kolumn

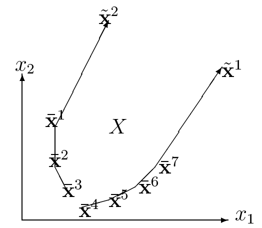
$$\left.\begin{aligned} 1 - \max_{a_{ik}} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \qquad [\min(c_k - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k)] \\ \text{då} \quad & \sum_{i=1}^{m} \ell_i a_{ik} \leq L \\ & a_{ik} \geq 0, \text{ heltal} \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Lösning: } \mathbf{a}_k$$

Formulering av LP på kolumngenereringsform—Dantzig–Wolfe-dekomposition

Låt $X = \{\mathbf{x} \in \Re^n_+ \mid \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{d}\}$ (eller $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$) vara en polyeder med **extrempunkterna** $\bar{\mathbf{x}}^p$, $p \in \mathcal{P}$ och de **extrema recessions-riktningarna** $\tilde{\mathbf{x}}^r$, $r \in \mathcal{R}$

$\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, 7\}$

$\mathcal{R} = \{1, 2\}$



Då gäller att

$$\mathbf{x} \in X \iff \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p \bar{\mathbf{x}}^p + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r \tilde{\mathbf{x}}^r \\ \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p = 1 \\ \lambda_p \geq 0, \quad p \in \mathcal{P} \\ \mu_r \geq 0, \quad r \in \mathcal{R} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x} \in X$ kan skrivas som en konvexkombination av extrempunkterna plus en konisk kombination av extremriktningarna

Denna *inre representation* av mängden X kan användas till att omformulera ett linjärt optimeringsproblem enligt *Dantzig-Wolfe dekomposition*, vilket sedan löses m.h.a. kolumngenerering.

$$\begin{aligned} \text{[LP1]} \qquad z^* = \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{(komplicerande villkor)} \\ & \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{d} \qquad \text{("enkla" villkor)} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Låt $X = \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{d}\}$ med extrempunkterna $\bar{\mathbf{x}}^p$, $p \in \mathcal{P}$ och extremriktningarna $\tilde{\mathbf{x}}^r$, $r \in \mathcal{R} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{[LP2]} \quad z^* = \min & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p (\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}^p) + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r (\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}^r) \\ \text{då} & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p) + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r) = \mathbf{b} \qquad | \ \boldsymbol{\pi} \\ & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p = 1 \qquad | \ q \\ & \lambda_p, \mu_r \geq 0, \ p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

Antal villkor i [LP2] är lika med "antal villkor i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$" + 1

Antal kolumner är mycket stort (antal extrempktr./riktn. till X)'

Dualen till [LP2] ges av (ej alla extrempktr./riktn. funna ännu)

$$
\begin{array}{llllll}
\text{[DLP2]} & z^* \le \max\limits_{\boldsymbol{\pi},q} & \mathbf{b}^T\boldsymbol{\pi} + q & & & \\
& \text{då} & (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p)^T\boldsymbol{\pi} + q & \le & (\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p), \quad p \in \bar{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P} & \mid \lambda_p \\
& & (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r)^T\boldsymbol{\pi} & \le & (\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r), \quad r \in \bar{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R} & \mid \mu_r
\end{array}
$$

med lösning $(\bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{q})$

Reducerad kostnad för variabeln λ_p, $p \in \mathcal{P} \setminus \bar{\mathcal{P}}$ ges av

$$(\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p) - (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p)^T\bar{\boldsymbol{\pi}} - \bar{q} = (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\bar{\mathbf{x}}^p - \bar{q}$$

Reducerad kostnad för variabeln μ_r, $r \in \mathcal{R} \setminus \bar{\mathcal{R}}$ ges av

$$(\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r)^T\bar{\boldsymbol{\pi}} = (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\tilde{\mathbf{x}}^r$$

Minsta reducerade kostnad finner vi genom att lösa subproblemet

$$\min_{\mathbf{x}\in X} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\mathbf{x} \quad \left(\text{alternativt:} \quad \min_{\mathbf{x}\in X} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\mathbf{x} - \bar{q}\right)$$

(jfr. Lagrange-subproblemet då de komplicerande bivillkoren är relaxerade!!)

Ger som lösning en extrempunkt, $\bar{\mathbf{x}}^p$, eller en extremstråle, $\tilde{\mathbf{x}}^r$

$\Rightarrow$ en ny kolumn i [LP2]: (ifall < 0)

$$\text{Antingen} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p \\ 1 \end{pmatrix} \text{eller} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r \\ \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel

$$
\begin{array}{lllllllllll}
z^*_{\text{IP}} & = & \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & & \\
\text{[IP]} & & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5 & \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 & \\
& & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \{0,1\} &
\end{array}
$$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} = \{\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^6\}$$

Optimallösning: $\mathbf{x}^*_{\text{IP}} = (0,1,1,0) \qquad z^*_{\text{IP}} = 4$

LP-relaxering

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
z^* & = & \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & & [\mathbf{c}^T\mathbf{x}] \\
\text{[LP1]} & & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5 & [\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}] \\
& & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 & [\mathbf{x} \in X] \\
& & & & & 0 & \le & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \le & 1 & [\mathbf{x} \in X]
\end{array}
$$

$$X = \texttt{conv} \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} = \texttt{conv}\,\{\bar{\mathbf{x}}^1, \dots, \bar{\mathbf{x}}^6\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \Re^4 \,\middle|\, \mathbf{x} = \sum_{p=1}^6 \lambda_p \bar{\mathbf{x}}^p; \ \sum_{p=1}^6 \lambda_p = 1; \ \lambda_p \ge 0, p = 1, \dots, 6 \right\}$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{[LP2]} & z^* = \min & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 + 7\lambda_5 + 5\lambda_6 & & \\
& \text{då} & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 + 4\lambda_5 + 5\lambda_6 & = & 5 \\
& & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 & = & 1 \\
& & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 & \ge & 0
\end{array}
$$

Startkolumner: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{llll}
\text{[LP2]} & & & \\
z^* \le \min & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 & & \\
\text{då} & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 5 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \ge & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{[DLP2]} & & & \\
z^* \le \max & 5\pi + q & & \\
\text{då} & 5\pi + q & \le & 5 \\
& 6\pi + q & \le & 3 \\
& 5\pi + q & \le & 6
\end{array}
$$

Lösning: $\quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = (1,0,0), \qquad \bar{\pi} = -2, \quad \bar{q} = 15$

Reducerade kostnader

$$
\begin{array}{ll}
& \min\limits_{\mathbf{x}\in X} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\pi})^T\mathbf{x} - \bar{q} \\
= & \min\limits_{p=1,\dots,6} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\pi})^T\bar{\mathbf{x}}^p - \bar{q} \\
= & \min\limits_{p=1,\dots,6} \{[(2,3,1,4) - (3,2,3,2)\cdot(-2)]\,\bar{\mathbf{x}}^p - 15\} \\
= & \min\{0,0,1,-1,0,0\} = -1 < 0
\end{array}
$$

Ny hörnpunkt i [LP1]: $\bar{\mathbf{x}}^4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad$ Kolumn i [LP2]: $\begin{pmatrix}\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^4\\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

Nytt, utökat problem

$$
\begin{array}{llll}
\text{[LP2]} & & & \\
z^* \le \min & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 & & \\
\text{då} & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 & = & 5 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 & \ge & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{[DLP2]} & & & \\
z^* \le \max & 5\pi + q & & \\
\text{då} & 5\pi + q & \le & 5 \\
& 6\pi + q & \le & 3 \\
& 5\pi + q & \le & 6 \\
& 5\pi + q & \le & 4
\end{array}
$$

Lösning: $\quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = (0,0,0,1), \qquad \bar{\pi} = -1, \quad \bar{q} = 9$

Reducerade kostnader:

$$\min_{p=1,\dots,6} \{(5,5,4,6)\,\bar{\mathbf{x}}^p - 9\} = \min\{1,0,2,0,2,1\} = 0$$

Optimallösning till [LP2] och [LP1]

$\boldsymbol{\lambda}^* = (0,0,0,1,0,0), \qquad \pi^* = -1, \quad q^* = 9$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{x}^*_{\text{IP}}, \qquad z^* = 4 = z^*_{\text{IP}}$$

Det var en ren tillfällighet att lösningen till [LP1] blev heltalig!

I allmänhet kan lösningen, $\mathbf{x}^*$, till [LP1] innehålla fraktionella variabelvärden.

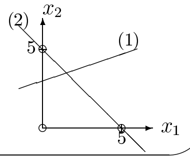
Lösning till [IP]

Vi måste alltså sedan finna en heltalslösning (ej säkert optimallösning till [IP]) bland de kolumner som genererats, d.v.s., lösa

$$\min \left\{ (2,3,1,4)\mathbf{x} \,\middle|\, (3,2,3,2)\mathbf{x} = 5, \ \mathbf{x} \in \{\bar{\mathbf{x}}^1, \bar{\mathbf{x}}^2, \bar{\mathbf{x}}^3, \bar{\mathbf{x}}^4\} \right\}$$

Numeriskt exempel på Dantzig-Wolfe-dekomposition

$$\begin{array}{llcllcll}
\min & & x_1 & - & 3x_2 & & & (0) & \\
\text{då} & - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 & (1) & \text{(komplicerande)} \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (2) & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & (3) &
\end{array}$$



$$\begin{aligned} X &= \left\{ \mathbf{x} \in \Re^2_+ \,\middle|\, x_1 + x_2 \leq 5 \right\} \\ &= \mathtt{conv}\left\{ (0,0)^T, (0,5)^T, (5,0)^T \right\} \end{aligned}$$

Fullständiga DW-master-problemet

$$\mathbf{x} \in X \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{x} = \lambda_1(0,0)^T + \lambda_2(0,5)^T + \lambda_3(5,0)^T = \begin{pmatrix} 5\lambda_3 \\ 5\lambda_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{llcllcll}
\min & - & 15\lambda_2 & + & 5\lambda_3 & & & (0) \\
\text{då} & & 10\lambda_2 & - & 5\lambda_3 & \leq & 6 & (1) \\
 & & & & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 & \\
 & & & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Första masterproblemet konstrueras utifrån punkterna $(0,0)$ och $(0,5)$ (motsvarar λ_1 och λ_2)

Iteration 1

$$\begin{array}{lrcll}
\min & -\ 15\lambda_2 & & & (0) \\
\text{då} & 10\lambda_2 & \leq & 6 & (1) \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 & \\
 & \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 &
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{ll} \text{Lösning:} & \lambda_1 = \frac{2}{5}, \lambda_2 = \frac{3}{5} \\ \text{Duallösning:} & \pi = -\frac{3}{2}, q = 0 \end{array} \right.$$

Minsta reducerad kostnad:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \left[(\mathbf{c}^T - \pi \mathbf{A})\mathbf{x} - q \right] = \min_{\mathbf{x} \in X} \left(\left[(1,-3) - (-\tfrac{3}{2})(-1,2) \right] \mathbf{x} - 0 \right)$$
$$= \min\{ -\tfrac{1}{2}x_1 \mid x_1 + x_2 \leq 5; x_1, x_2 \geq 0 \} = -\tfrac{5}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} = (5,0)^T$$

Ny kolumn: $\quad \begin{array}{l} \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = (1,-3)(5,0)^T = 5 \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = (-1,2)(5,0)^T = -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Iteration 2

$$\begin{array}{lrcl}
\min & -15\lambda_2 + 5\lambda_3 & & \\
\text{då} & 10\lambda_2 - 5\lambda_3 & \leq & 6 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{ll} \text{Lösning:} & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{11}{15}, \lambda_3 = \frac{4}{15} \\ \text{Duallösning:} & \pi = -\frac{4}{3}, q = -\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

Minsta reducerad kostnad:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \left[(\mathbf{c}^T - \pi \mathbf{A})\mathbf{x} - q \right] = \min_{\mathbf{x} \in X} \left(\left[(1,-3) - (-\tfrac{4}{3})(-1,2) \right] \mathbf{x} - (-\tfrac{5}{3}) \right)$$
$$= \min\{ -\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{5}{3} \mid x_1 + x_2 \leq 5; x_1, x_2 \geq 0 \} = 0$$

Optimallösning: $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = \frac{11}{15}, \lambda_3^* = \frac{4}{15}$

$\Rightarrow \mathbf{x}^* = (5\lambda_3, 5\lambda_2)^T = (\frac{4}{3}, \frac{11}{3})^T \qquad z^* = \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{11}{3} = -\left(9 + \frac{2}{3}\right)$

Block-angulär struktur

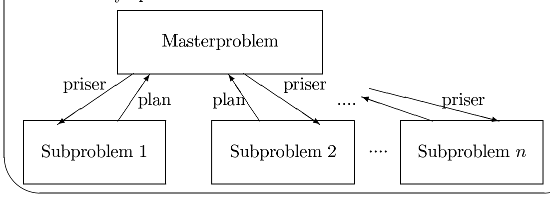
$$\begin{array}{llllllllll}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{då} & A_1x_1 & + & A_2x_2 & + & \cdots & + & A_nx_n & \leq a & \mid \pi \\
 & B_1x_1 & & & & & & & \leq b_1 & \mid x_1 \in X_1 \\
 & & & B_2x_2 & & & & & \leq b_2 & \mid x_2 \in X_2 \\
 & & & & & \cdots & & & \cdot\ \cdot & \\
 & & & & & & & B_nx_n & \leq b_n & \mid x_n \in X_n \\
 & & & & & x_1, x_2, \cdots, x_n & & & \geq 0 &
\end{array}$$

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

Dantzig-Wolfe-dekomposition

Decentraliserad planering:

- Huvudkontoret (masterproblemet) sätter priser ($\boldsymbol{\pi}$) på de gemensamma resurserna (komplicerande bivillkor).
- Avdelningarna (subproblemen) föreslår (produktions-) planer ($A_j\bar{x}_j^p$ eller $A_j\tilde{x}_j^r$) utifrån de givna priserna och sina egna förutsättningar.
- Huvudkontoret mixar de föreslagna planerna på ett optimalt sätt och sätter nya priser.



Hitta tillåtna lösningar

Låt $\bar{\lambda}_p^j$, $p \in \mathcal{P}$, och $\bar{\mu}_r^j$, $r \in \mathcal{R}$, $j = 1, \ldots, n$, vara en tillåten och (nästan) optimallösning till masterproblemet. En bra tillåten x-lösning ges då av (för alla j):

$$\begin{array}{lrcll}
\max & c_jx_j & & & \\
\text{då} & A_jx_j & \leq & \sum_{p \in \mathcal{P}} \bar{\lambda}_p^j (A_j\bar{x}_j^p) + \sum_{r \in \mathcal{R}} \bar{\mu}_r^j (A_j\tilde{x}_j^r) & \\
 & B_jx_j & \leq & b_j & \\
 & x_j & \geq & 0 & [X_j = \{x_j \geq 0 \mid B_jx_j \leq b_j\}]
\end{array}$$

ty då gäller $\displaystyle\sum_{j=1}^n A_jx_j \leq \sum_{j=1}^n A_j \underbrace{\left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \bar{\lambda}_p^j \bar{x}_j^p + \sum_{r \in \mathcal{R}} \bar{\mu}_r^j \tilde{x}_j^r \right)}_{x_j \in X_j} \leq a$

Tekniken kallas: högerleds-allokering

Uppskattningar av optimala målfunktionsvärdet

$$z^* = \min\{c^Tx \mid Ax = b,\ x \in X\}$$

$$\begin{array}{rrcll}
z^* = \min & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p(\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p) + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r(\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r) & & & \\
\text{då} & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p) + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r) & = & \mathbf{b} & \mid \pi \\
 & \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p & = & 1 & \mid q \\
 & \lambda_p, \mu_r & \geq & 0, \ p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll}
z^* \leq \bar{z} = \mathbf{b}^T\bar{\boldsymbol{\pi}} + \bar{q} = \max\limits_{\boldsymbol{\pi}, q} & \mathbf{b}^T\boldsymbol{\pi} + q & & & \\
\text{då} & (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p)^T\boldsymbol{\pi} + q & \leq & (\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p), & p \in \bar{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P} \\
 & (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r)^T\boldsymbol{\pi} & \leq & (\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r), & r \in \bar{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}
\end{array}$$

Låt λ_p^*, $p \in \mathcal{P}$, och μ_r^*, $r \in \mathcal{R}$, vara en optimallösning till det fullständiga masterproblemet, och låt $(\bar{\boldsymbol{\pi}}, \bar{q})$ vara en optimal duallösning då endast kolumnerna i $\bar{\mathcal{P}}$ och $\bar{\mathcal{R}}$ är genererade. Multiplicera primalens högerled ($\mathbf{b}$ resp. 1) med $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ resp. $\bar{q} \Rightarrow$

$$0 \geq z^* - \bar{z} = z^* - \mathbf{b}^T\bar{\boldsymbol{\pi}} - 1 \cdot \bar{q} =$$
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p^* \left[(\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p) - (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p)^T\bar{\boldsymbol{\pi}} - \bar{q}\right] + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r^* \left[(\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^r) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^r)^T\bar{\boldsymbol{\pi}}\right] \geq$$
$$\min_{p \in \mathcal{P}} \left[(\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}^p) - (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^p)^T\bar{\boldsymbol{\pi}} - \bar{q}\right] + \sum_{r \in \mathcal{R}} \mu_r^* \min_{s \in \mathcal{R}} \left[(\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^s) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^s)^T\bar{\boldsymbol{\pi}}\right]$$

Ifall subproblemet har obegränsad lösning kan ingen optimistisk uppskattning beräknas i denna iteration, annars gäller:

$$\min_{s \in \mathcal{R}} \left[(\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}^s) - (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}^s)^T\bar{\boldsymbol{\pi}}\right] \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\bar{z} \geq z^* \geq \bar{z} + \min_{p \in \mathcal{P}} \left[(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\bar{\mathbf{x}}^p - \bar{q}\right] = \bar{z} + \min_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\bar{\boldsymbol{\pi}})^T\mathbf{x} - \bar{q} = \underline{z}$$

Konvergens

Eftersom varje polyeder X har ett ändligt antal extrempunkter och -strålar, så kan maximalt ett ändligt antal kolumner genereras. Då alla kolumner som skall genereras har genererats, kommer lösningen till masterproblemet också vara en lösning till det ursprungliga linjära problemet. För varje ny kolumn som adderas till masterproblemet minskar dess optimala målfunktionsvärde (ev. hålls konstant ibland). Alltså kommer den pessimistiska uppskattningen $\bar{z}_t$ att konvergera monotont mot z^*.

Den optimistiska uppskattningen $\underline{z}_t$ konvergerar också, men inte säkert monotont. Vid den iteration (t) då en optimallösning till det fullständiga masterproblemet erhålls kommer $\underline{z}_t$ att vara lika med $\bar{z}_t$.

Avbrottskriterium: $\bar{z}_t - \underline{z}_t^* \leq \varepsilon$ där $\underline{z}_t^* = \max_{s=1,\dots,t} \underline{z}_s$ och $\varepsilon > 0$