Övningar för de första två veckorna

A

1. Kan ni fortsätta följden 1,3,5,7,9,11,... ?

2. Vilket är det 7:e talet i följden? Vilket är det 184:e? Vilket är tal nr n?

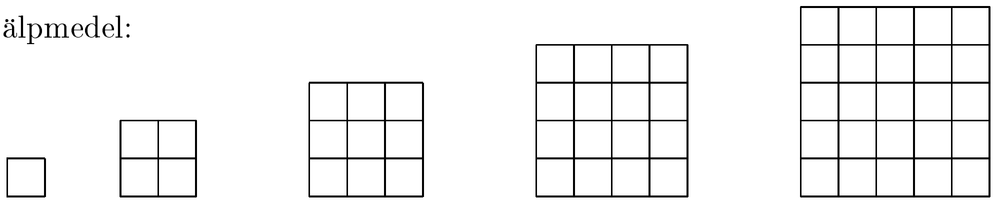
3. Titta nu på delsummorna av talen i följden:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= \\ 1+3+5 &= \\ 1+3+5+7 &= \\ 1+3+5+7+9 &= \end{aligned}$$

   Ser ni något mönster? Kan ni skriva upp ett allmänt påstående med n stycken termer i vänsterledet? Vad står i så fall i högerledet?

   Hur skulle man kunna visa detta påstående?

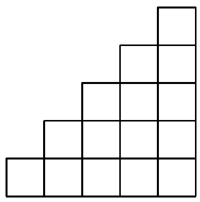
   Hjälpmedel:



4. Lustigt nog blir inte formeln lika snygg för delsummorna i följden $1, 2, 3, \ldots$. Gauss, påstås det, gjorde så här när han var nio år gammal för att bestämma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 1 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \cdots & 101 \end{array}$$

   Man kan också tackla detta geometriskt, med hjälp av följande figur, fast man kanske behöver två kopior:



   Eller också kan ni "manipulera" summan $1 + 2 + \cdots + n$ för att dra nytta av jobbet ni gjorde med $1+3+5+\cdots$. Ni har ju redan gjort halva jobbet, eller hur?

B

När Galileo Galilei (1564-1642) undersökte hur långt en kula rullar utför ett lutande plan under en viss tid kom han till ett resultat som han formulerade på följande sätt: De vägsträckor som kulan rullar under successiva, lika långa tidsintervall förhåller sig som de udda talen

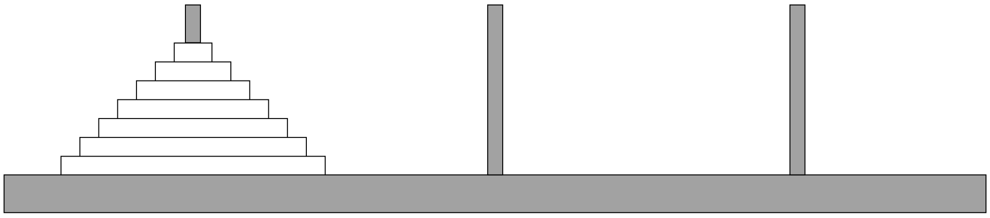
$$1 : 3 : 5 : 7 : 9...$$

Detta ska tolkas så att en kula rullar

1	längdenhet under sekund	1
3	längdenheter under sekund	2
5	längdenheter under sekund	3
7	längdenheter under sekund	4
	osv.	

1. Kan ni ur dessa data ställa upp ett samband mellan sträckan och tiden?
2. Påminner detta om någon formel ur fysiken i gymnasiet?
3. Spelar lutnings*graden* verkligen ingen roll? Vad händer om lutningen är ∞?

C



En platta har 3 pinnar och på en av pinnarna sitter n stycken skivor med minskande diameter (på bilden är $n = 7$). Problemet består i att flytta alla skivorna över till en annan pinne. Man får bara flytta en skiva åt gången och man får aldrig sätta en större skiva på en mindre.

1. Lös problemet för 7 skivor. Det räcker att ha sju föremål av olika storlekar, eller numrerade papperslappar.
2. Går det alltid att lösa problemet oavsett hur många skivor man har?
3. Hur många flyttar behövs för att lösa problemet med n skivor?
4. Hur skulle ni kunna bevisa era påståenden om detta?

D

Induktion är ett mycket effektivt redskap i matematiken. Dess syster *rekursionen* är oerhört viktig inom datalogi. Läs om induktion i kompendiet (sidorna 28–31), och diskutera om induktionsaxiomet är rimligt. Försäkra dig också om att du förstår de tre olika stegen i ett induktionsbevis (sidorna 30–31). Sen är det dags att översätta denna förståelse i praktiken, en helt annan femma...
Induktion är som en kedjereaktion; får man bara igång den blir konsekvenserna omfattande. Således ligger dess styrka kanske främst i att den tillåter en att koncentrera sig på detaljer, men ändå få fram bevis av svepande påståenden.
Det kan vara något överraskande att induktionsaxiomet är ekvivalent med *välordningsaxiomet*, som säger att varje icketom mängd av naturliga tal har ett minsta element.

1. Ge ett induktivt bevis av formeln för $1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Man skulle kunna säga att ett sådant bevis är *rigoröst*, i motsats till det intuitiva "bildbeviset." Vi återkommer till detta, men diskutera nu vilka invändningar man skulle kunna ha mot bildbeviset, och på vilket sätt det induktiva beviset är bättre i det avseendet. Finns det något positivt att säga om bildbeviset, eller borde sådana bevis förkastas helt?

   Nej, *rigorös* betyder inte stel. Eller?

2. Försök nu använda samma teknik för att bevisa några av följande påståenden. Var alltid noga med att ange för vilka naturliga tal n påståendet gäller (glöm inte $n = 0!$):

   Jag menar $n = 0$, inte $n = 0!$

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = ?$

   (c) $n! < n^n$.

   (d) Om man drar n räta linjer i planet så att inga två är parallella och inga tre möts i en punkt, då delar dessa linjer upp planet i $\binom{n}{2}+n+1$ områden.

   $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

3. Låt $P(n)$ vara påståendet $2+4+\cdots+2n = \frac{1}{8}+n+n^2$. Visa att om $P(k)$ är sant för ett naturligt tal k, då är även $P(k+1)$ sant. Följer det att $P(n)$ är sant för alla n?

4. Man har visat att det minsta naturliga talet n som är sådant att $991n^2+1$ är en perfekt kvadrat är

   $$n = 12,055,735,790,331,359,447,442,538,767 \approx 10^{28}.$$

   Antag att ni har ett datorprogram som kollar om talet $991n^2+1$ är en perfekt kvadrat för naturliga tal n. Antag att programmet är så bra att det, för godtyckligt n, bara krävs en räkneoperation för att avgöra om $991n^2+1$ är en perfekt kvadrat (en omöjlighet förstås, men jag känner mig generös i dag). Om ni körde programmet på världens snabbaste dator, börjandes från $n = 1$, hur lång tid skulle det ta att upptäcka det första talet som ger en perfekt kvadrat? (Ett år är ungefär $\pi \cdot 10^7$ sekunder. Era datorer kör en tom for-loop ca. 10^8 varv på en sekund).

Nu har ni börjat tveka lite om Goldbachs förmodan, eller hur?

E

1. Visa att det går att lösa problemet med Tornen i Hanoi (övning C) för godtyckligt många skivor. Beviset borde vara kort, för ni skall bara bevisa att problemet *går* att lösa.

   Ge kommandot `M-x hanoi` i Emacs

2. Visa att det bara behövs så många flyttar som ni sa i övning C.

3. Enligt en legend placerade Gud (eller var det hennes lillebror?) i världens början 64 skivor på en pinne och satte en grupp präster på att flytta dem enligt reglerna ovan. När de är klara rasar tornet och de får var sin glasspinne. (Egentligen skall världen sluta när de är klara, men jag tyckte att det var trevligare så här).

   Den här legenden är förstås uppdiktad av en matematiker.

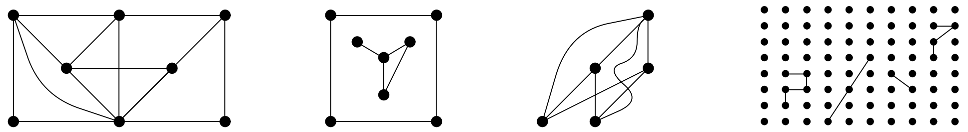
   Enligt James Ussher, som stödde sig på Bibeln, började världen på kvällen den 22 oktober året 4004 f.Kr.

   Detta är däremot helt sant. Det är sant! Se http://www.eb.com

   Om prästerna flyttar en skiva i sekunden, och världen slutar när de är klara, hur långt har vi då kvar?

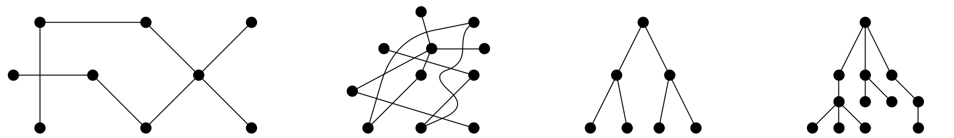
F

Här är några exempel på *grafer:*



Följande grafer är *träd*:

Ska detta föreställa träd?! Den här gubben skulle aldrig få jobb på en plantskola.



1. Försök komma på en enkel definition av en graf, en definition som bara talar om mängder och deras element. *Noderna* borde utgöra en mängd. (Titta på definitionen av *riktad graf* i kompendiet. Skillnaden mellan en graf och en riktad graf är att kanterna i den riktade grafen är ‘enkelriktade’, medan de i en ‘vanlig’ graf saknar riktning.)

2. Försök sedan definera ett träd utifrån detta. Ni kan behöva, bland annat, definitionen av en *väg* i en graf för att kunna definiera ett träd.

3. Visa följande med induktion: Ett träd med n noder har $n-1$ kanter. (Begreppet *löv* kommer förmodligen att vara användbart. Ett löv på ett träd är naturligtvis något som hänger längst ut.)

4. En *fippel* definieras så här:
   - En punkt är en fippel.
   - En punkt som är knuten till ett antal disjunkta fipplar är en fippel.

   Vad är en fippel?

5. Tänk er att ni har en stor graf som är fullständigt ihoptrasslad. Ni skall avgöra om den är ett träd. Ni kan inte använda några avancerade algoritmer eller göra några sofistikerade analyser av grafens struktur, men ni kan plocka isär den så mycket ni vill. Hur avgör ni om detta är ett träd?

G

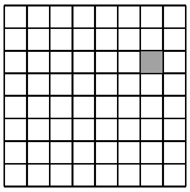
Diskutera “beviset” som handlade om färger på hästar och som presenterades på första föreläsningen.

1. Gör en noggrann analys av vad som är fel med beviset.

2. När ni nu hittat ett fel i beviset, betyder det då att påståendet är felaktigt? Betyder det att inte alla hästar har samma färg?

3. Hur bevisar man att ett påstående är felaktigt?

H



Tänk er en "schackbräda" med $2^n \times 2^n$ rutor, där man har tagit bort en av rutorna. Kan man täcka en sådan bräda fullständigt med bitar av formen som inte överlappar varandra?

I

Som ni kanske upptäckt är det likheten $n^2 = (n-1)^2 + (2n-1)$ som är kärnan i det induktiva beviset av $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Denna likhet kan också skrivas så här:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Men, säger ni nu, detta kunde vi ju redan i 7:an!

Observera att *koefficienterna* till potenserna av n, i högerledet är 1,2,1.
Skriv nu upp motsvarande formler för dimensionerna 0,1 och 3 och ta fram koefficienterna i respektive högerled. Skriv upp koefficienterna ni fått i formlerna i en triangel så här:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & * & & & \\ & & * & & * & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ * & & * & & * & & * \end{array}$$

Ser ni något mönster? Kan ni gissa nästa rad? Skulle den säga något om en fyrdimensionell kub? Vad är en n-dimensionell kub? Skriv ned alla intressanta egenskaper som ni tror gäller för triangeln ovan.

Tänk om nån hade berättat detta för er på högstadiet. Då hade ni sluppit allt trubbel med $(a+b)^5$ och liknande monster!

J

1. Låt M_n vara mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ (eller vilken som helst mängd med n element). Hur många delmängder har M_2?

2. Hur många av dessa delmängder har ett element? Hur många har två element? Noll element?

3. Gör om ovanstående för $n = 3, 4, 5$. Gör detta på något systematiskt sätt.

4. Skriv ned resultatet på en rad för varje n och stapla raderna som ni gjorde i övning I (ta med $n = 0$ och $n = 1$).

   Denna triangel kallas (i sin helhet) för *Pascals triangel*, efter den franske matematikern Blaise Pascal (1623–1662), som, bland mycket annat, var en av dem som lade grunden till sannolikhetsläran. Triangeln var dock känd tidigare i Europa och förekom redan i början av 1300-talet i en bok av den kinesiske matematikern Chu Shih-chieh.

5. Ni har förmodligen redan sett sambandet mellan ett tal x i triangeln och talen strax ovanför x (på var sin sida om x i raden ovanför x). Försök formulera detta som en sats om antalet delmängder i en mängd. Formulera också en sats om symmetrin i varje rad. Kan ni bevisa den?

6. Vad är summan av en rad i Pascals triangel?

K

1. Hur många binära strängar av längd n har exakt k ettor? Varför?

2. Om vi utgår från svaret i nästsista övningen i J, kan ni då skriva ett (rekursivt) program som ger antalet k-delmängder i en mängd med n element? Vilka är basfallen, d v s under vilka förhållanden "bottnar" rekursionen? Finns det fler än ett sådant fall? Hur hänger dessa randvillkor (basfall) ihop med "ränderna" (utkanterna) i Pascals triangel?

3. Man kan fylla varje rad i triangeln, till vänster och höger om det vi räknat ut, med nollor. Kolla att detta överensstämmer, dels med antalet delmängder i en mängd, dels med rekursionsformeln. Kan detta användas för att förenkla randvillkoren (basfallen) i algoritmen (och därmed algoritmen)? Vilken effekt tror ni det skulle få på beräkningstiden?

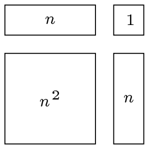
4. Man kan välja en 3–delmängd ur M_5 genom att plocka ut tre element i tur och ordning. Första elementet kan väljas på fem olika sätt, d v s det kan vara vilket som helst av talen 1,2,3,4,5. När det är gjort har vi bara fyra element kvar att välja bland. Oberoende av *vilket* element vi valde först, kan vi välja det nästa på fyra olika sätt. Analogt kan vi välja det tredje elementet på tre olika sätt, oberoende av de första två. Detta ger alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika sätt att välja ut en tre–delmängd ur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, men det finns ju bara tio olika sådana. Förklara detta.

5. Kan ni utveckla argumentet i föregående övning för att ge en explicit formel för antalet k–delmängder i en n–mängd, d v s antalet delmängder med k element i en mängd med n element? Stämmer formeln med rekursionen ovan? (Antalet k–delmängder i en n–mängd betecknas med $\binom{n}{k}$, vilket utläses 'n över k'.)

6. Skriv ett program som räknar antalet delmängder i en mängd enligt den nya formeln (d v s utan rekursion).

   Vilket av dessa två beräkningssätt tror ni är snabbare? Kolla om det stämmer! (Ni kommer förmodligen att få se mera om rekursiva beräkningssätt för detta problem i första kursen i programmeringsteknik).

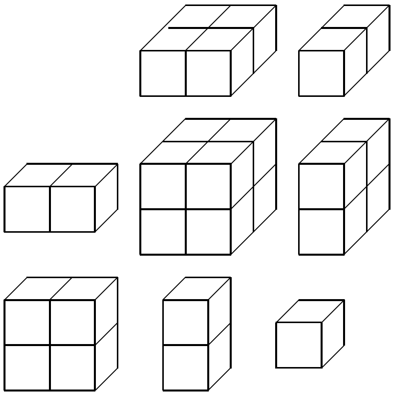
L



En av matematikens viktigaste aspekter är *generalisering*. I övning A använde vi en geometrisk figur för att visa att $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Man kan också använda den figuren för att visa likheten $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

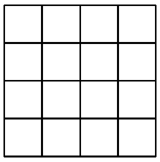
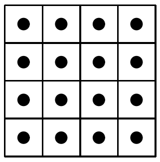
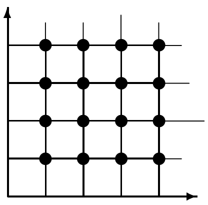
Man kan tycka si och så om det beviset (och det finns de som skulle säga att det inte är något bevis alls), men det ger upphov till en uppenbar generalisering, som inte alls uppstår från det induktiva beviset. Nämligen: Vi använde en 2-dimensionell figur i övning A. Den tre-dimensionella motsvarigheten till denna figur är, förstås, en kub. Finns det då någon "3-dimensionell" motsvarighet till formlerna som vi visade med hjälp av den 2-dimensionella figuren?

1. Titta på följande figur och försök skriva upp en formel för $(n + 1)^3$.



2. Detta var dimensionerna 2 och 3. Hur är det med dimension 1? Dimension 0? Försök ta fram både geometriska figurer och motsvarande formler som ni gjorde för två och tre dimensioner.

3. (Om ni hinner) Hur kan man definiera den fyrdimensionella varianten av figurerna ovan? Gör en definition som kan användas för att göra ett rigoröst bevis av den geometriska idéen. Följande figurer kanske kan vara till hjälp.

Om ni nu har konstruerat ett bevis av övning A genom att beskriva den geometriska idén med hjälp av koordinater, då slipper ni hänvisa till någon geometrisk figur. Detta har två fördelar: Ni har ett rigoröst bevis att ge skeptikerna, och det är (bör vara) ganska uppenbart hur det beviset generaliseras till vilken dimension som helst.

Rigorositet i all ära, bara det inte blir *rigor mortis*.