Relationer och funktioner

Syftet med dessa övningar är att bekanta sig med relationer och speciellt med ekvivalensrelationer och partiella ordningar. Dessutom handlar de sista övningarna om grundläggande begrepp vad det gäller funktioner.

A

Denna övning handlar om olika relationsegenskaper. Läs först i boken hur en *relation* definieras.

1. Betrakta mängderna $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, T = \{1, 2, 3\}$, samt $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A : A \text{ en delmängd till } \mathbb{R}\}$. Ge, med hjälp av litteratur och egen uppfinningsrikedom, exempel på relationer på mängderna ovan. Vissa kan fungera på flera av mängderna, andra bara på en speciell. Försök att få ihop ett bibliotek på åtminstone en 'naturlig' relation på varje mängd.

2. Betrakta nu de två relationerna $\leq$ och $<$ på $\mathbb{R}$. Skissa relationerna (som delmängder av planet) och jämför. Vad är skillnaden? Kan ni beskriva den egenskap som $\leq$ har men inte $<$ har, i matematiska termer, utan att referera till skisserna av relationerna?

3. Nu skall ni jämföra två relationer på $M = \{\text{människor på jorden}\}$. Den första är given av att en person A är relaterad till B om A är yngre än B. Den andra relationen ges av att A är relaterad till B om de är syskon. Skissa hur relationerna ser ut och jämför (tänk dig t ex att jordens befolkning är *väldigt* liten). Kan ni hitta någon egenskap som den andra relationen har men inte den första? Kan ni beskriva denna egenskap i matematiska termer utan att referera till skisserna?

4. Då $3 < 5$ och $5 < x$ kan man dra en för er kanske självklar slutsats. Vilken? Vad är det för slags egenskap som en relation behöver ha för att ni skall kunna dra en sådan slutsats? Skriv ner en definition av den.

5. I uppgift 2, 3 och 4 fann ni tre egenskaper som en relation kan ha. Läs nu i boken om reflexivitet, symmetri och transitivitet. Var det dessa egenskaper ni fann? Om inte, diskutera gärna med en övningsledare vad ni fann. Läs i boken om den fjärde, och sista, viktiga relationsegenskap som vi skall titta på: *antisymmetri*. Är den motsatsen till symmetri? Finns det någon relation som är både symmetrisk och antisymmetrisk? Finns det någon relation som är varken symmetrisk eller antisymmetrisk?

6. Låt $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ vara en ändlig mängd och låt R vara en relation på M. Ett sätt att representera R är att bilda ett kvadratiskt schema (matris) med r rader och r kolumner enligt följande: Om A_{ij} betecknar elementet i rad i och kolumn j så sätt

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } m_i R m_j \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Gör sådana matriser för alla relationer ni funnit på $\{1, 2, 3\}$ i uppgift 1. Hur många olika relationer finns det på $\{1, 2, 3\}$? Mera allmänt: Hur många relationer finns det från en mängd med r element till en med s stycken?

7. Låt R vara en relation på en ändlig mängd M och låt A vara matrisen som representerar R. Hur ser man på matrisen att R är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv? (Transitiviteten är lite svår.)

8. Ett visuellt sätt att representera en relation på en ändlig mängd M är med hjälp av s.k. riktade grafer. Detta går till så att varje element i M bildar en nod och sedan drar man en pil från a till b om och endast om a är relaterad till b. Gör sådana riktade grafer för de relationer ni fann på $\{1, 2, 3\}$ i uppgift 1. Hur kan man från den riktade grafen se om relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv?

9. Diskutera användbarheten av följande tre olika sätt att representera relationer: Lista (delmängd till Cartesiska produkten), matris och riktad graf.

B

Denna uppgift handlar om ekvivalensrelationer.

1. Antag att vi skall skriva ett Haskell-program som skall jobba med rationella tal och att vi gör detta genom att betrakta ett rationellt tal $\frac{a}{b}$ som ett ordnat par, (a, b), av heltal. Finns det flera par som representerar samma rationella tal? Detta ger upphov till en relation på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Skriv ner den. Vilka relationsegenskaper uppfyller den? Detta ger en partition av $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, på vilket sätt? Skissa partitionen.

2. En relation som uppfyller de relationsegenskaper som relationen ovan har, kallas en ekvivalensrelation (Kolla med övningsledare att ni hittat rätt relationsegenskaper). Hitta tre exempel till på ekvivalensrelationer.

3. Begreppen ekvivalensrelation och partition är tätt förknippade. Undersök detta genom att besvara följande två frågor: Om man har en partition, hur kan man då få en ekvivalensrelation? Omvänt, hur ger en ekvivalensrelation en partition?

4. Låt $M_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ och låt $\mathcal{P}(M_N) = \{A : A \subseteq M_N\}$. Fixera först $N = 3$. Hur många och vilka element består $\mathcal{P}(M_N)$ av då? Hur många element finns det i $\mathcal{P}(M_N)$ för godtyckligt N? Definiera nu följande nya relation R på $\mathcal{P}(M)$:

$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow |A| = |B|.$$

Visa att R är en ekvivalensrelation. Hur många ekvivalensklasser blir det, och hur kan man karakterisera en ekvivalensklass?

5. (*) Låt oss nu avslutningsvis fullborda uppgift 1.

   (a) Erinra er den ekvivalensrelation på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ni fann som gör att alla talpar som vi vill ska vara 'samma' rationella tal är ekvivalenta. Man kan nu tänka sig (Försök!) de rationella talen som $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ med er fina ekvivalensrelation.

(b) Definiera addition och multiplikation på (ekvivalensklasserna av) talparen i $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ så att dessa stämmer överens med addition och multiplikation av rationella tal så som 'det brukar vara'. (Tala alltså om vad $(p, q) + (r, s)$ och $(p, q) \cdot (r, s)$ ska vara) Försök sedan visa att dessa är väldefinierade, d v s att det inte spelar någon roll vilken representant i ekvivalensklasserna för (p, q) resp. (r, s) som vi väljer.

(c) Visa att additionen och multiplikationen i förra uppgiften är kommutativa och associativa och att distributiva lagen gäller.

C

Denna uppgift handlar om partiella ordningar.

1. Låt $S_N = \{d \in \mathbb{Z}^+ : d \mid N\}$, där $N \in \mathbb{Z}$ och $N \geq 2$. Undersök S_N för $N = 6, 7, 8, 12, 74$. Vad är det som avgör om S_N är en stor eller liten mängd? Vad är det minsta respektive största antal element som S_N kan innehålla? För vilka N blir S_N minst?

2. Antag nu att vi vill ordna mängden S_N på något sätt. Det finns ett mycket traditionellt sätt att göra detta på, nämligen med '$\leq$'. Man kan uttrycka det med hjälp av relationsbegreppet genom att definiera relationen R_1 på S_N som:

$$aR_1b \Longleftrightarrow a \leq b.$$

   Rita relationsgrafen och ge relationsmatrisen för R_1 då $N = 12$.

3. Ett sätt att *delvis ordna* S_N är att ersätta "$a \leq b$" med "$a|b$," d v s a delar b. Vi inför alltså relationen R_2 definierad som:

$$aR_2b \Longleftrightarrow a \mid b.$$

   Rita relationsgrafen och ge relationsmatrisen för R_2 då $N = 12$. Relationen R_2 ger upphov till en ordning av elementen i S_{12} (och S_N i allmänhet). Kan man här alltid avgöra vilket av två givna element som "kommer först" i denna ordning? Det är inte alltid man kan (eller vill) avgöra vilket av två element i en mängd som är 'störst' (bäst eller vackrast).[1]

4. Betrakta nu R_1 och R_2 som delmängder till den Cartesiska produkten $S_N \times S_N$. Bevisa att $R_2 \subseteq R_1$. Är $R_1 = R_2$ för några N? I så fall vilka?

5. Undersök vilka (relations-) egenskaper som R_1 och R_2 uppfyller. Relationer som uppfyller alla dessa egenskaper kallas *partiella ordningar* (titta i boken).

6. Det är gott om pilar i graferna som ni ritade i uppgift 2 och 3, och därför är de lite svårtolkade. Fundera på följande frågor: Om man förutsätter att man vet att relationen uppfyller egenskaperna ni fann i uppgift 5, hur kan man då förenkla grafen? (Många pilar blir liksom självklara.) Hur skulle man kunna "avskaffa" pilarna? Gör sedan förenklade grafer för relationerna R_1 och R_2 i t ex fallen $N = 7, 8, 12, 30$. Om ni lyckats bra med er förenkling bör det nu vara väldigt överskådligt.

[1] Om mängden t ex är din samling av Dylan-plattor, så kan det ju vara svårt att avgöra om "Blonde on Blonde" eller "Freewheelin' " är den bästa av de två.

7. Finns det några minimala eller maximala element med avseende på R_1 och R_2? Hur är det med minsta respektive största element?

8. I allmänhet är det en väsentlig skillnad på R_1 och R_2. Försök att formulera ett villkor som R_1 alltid uppfyller, men som R_2 bara uppfyller i de specialfall då $R_1 = R_2$.

9. (*) Fixera återigen $N = 12$. Finns det någon annan relation $R \neq R_1$ på S_{12}, som uppfyller egenskaperna ni fann i uppgift 5 och 8 och för vilken det dessutom gäller $R_2 \subseteq R$?

10. (*) Finns det någon relation R på S_N som uppfyller egenskaperna från uppgift 5 och så att $R_1 \subset R$ (äkta delmängd)?

11. (*) Betrakta relationen R med följande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Motivera att R är en partiell ordning. Rita Hasse-diagrammet. Bestäm minimala, maximala, minsta respektive största element.

D

1. Vad är en funktion? Svara på detta utan att använda boken.

2. Vad är definitionsmängden till en funktion?

3. Vad är skillnaden mellan målmängd och bilden av en funktion? (Bilden kallas ofta också för värdemängden.)

4. Hitta exempel, om det går, på funktioner med

   (a) definitionsmängd {ko,häst,björn,struts} och bild $\{2, 4\}$.

   (b) definitionsmängd {alla olika djurarter på jorden} och bild $\mathbb{N}$.

   (c) definitionsmängd {alla olika djurarter på jorden} och målmängd $\mathbb{N}$.

   (d) definitionsmängd $\mathbb{Z}$ och bild $\mathbb{N}$.

   (e) definitionsmängd $\mathbb{N}$ och bild $\mathbb{Z}$. Det går!

   (f) definitionsmängd $[0, 1]$ och bild $(0, 1)$.

   (g) definitionsmängd $\mathbb{R}$ och bild $\mathbb{Z}$.

   (h) definitionsmängd $M \times M$ och målmängd M, där $M = \{f \mid f \text{ funktion}, f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\}$.

5. Red ut begreppen surjektiv och injektiv och skillnaden mellan dessa. Fyll varje rad i följande tabell med minst en funktion.

surjektiv	injektiv	funktion
Ja	Ja	
Nej	Ja	
Ja	Nej	
Nej	Nej	

E

Låt f och g vara funktioner som är givna i sina respektive definitionsmängder av $f(x) = \frac{e^x+1}{x^2-1}$ och $g(x) = x^2 - 1$.

1. Vad är $f(0), f(1), g(0), g(1)$?
2. Ange definitionsmängder $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ som är så stora som möjligt.
3. Vad är $f(x^2), f(\ln y), f(\sin t), g(x^2 - 1)$?
4. Vad är $(f + g)(x)$ och $(f \cdot g)(x)$?

F

1. En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas bijektiv. Man säger att en bijektiv funktion är inverterbar. Varför då?
2. Vad är inversa funktionen f^{-1} till en inverterbar funktion f?
3. Hitta på ett par exempel på funktioner som har invers och ange respektive inversa funktioner. (Det är som alltid viktigt att ange definitionsmängd och målmängd.)
4. Rita upp $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem för något av dina exempel. Vad ser du?
5. Har alla surjektiva funktioner invers? Motivera!
6. Har alla injektiva funktioner invers? Motivera!
7. Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ och $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ vara tre olika funktioner givna av att $f(x) = g(x) = h(x) = x^2$. Undersök om dessa funktioner är injektiva, surjektiva eller bijektiva.

G

1. Vad är sammansättningen av två funktioner? Jmf detta med sammansättning av två relationer.

2. Antag att vi har en engelsk-svensk ordbok där varje engelskt ord bara har en svensk översättning. Detta kan man tänka sig som en funktion f. Hur då? Vad är definitionsmängd och vad är målmängd? Antag nu att vi har en svensk-kinesisk ordbok som också bara har en kinesisk översättning till varje svenskt ord. Låt detta svara mot en funktion g. Vad är $g \circ f$ respektive $f \circ g$?

3. Skriv funktionerna i uppgift E 3. som sammansatta funktioner genom att definiera nya lämpliga funktioner.

4. Låt $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = -(x+1)$ vara två funktioner med samma definitionsmängd nämligen $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Vad är bilderna $f(D_f)$ och $g(D_g)$? Vad är $f \circ g$ resp. $g \circ f$? Är $f \circ g = g \circ f$? Vad händer om vi sätter $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och $D_g = \mathbb{R}$?

5. Gäller det att om f och g är inverterbara funktioner så är deras sammansättningar också inverterbara? Vad är i så fall inversen till sammansättningarna?

6. Vad är inverserna till $f \circ g$ resp. $g \circ f$ i uppgift 4?

7. Låt f och g vara två funktioner med definitionsmängd $\mathbb{R}$ givna av $f(x) = |x|$ och $g(x) = x^2$. Jämför $f \circ g$, $g \circ f$ och g.

8. Enligt förra uppgiften så är $f \circ g = g$. Från detta följer att

$$id = g \circ g^{-1} = (f \circ g) \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ id = f$$

   där id är funktionen definierad av $id(x) = x$. Vad är fel?

H

Tag två tal x_1 och x_2 i $\{0, 1, 2, 3\}$, möjligtvis två lika, och associera till dessa alla de andragradspolynom som har båda dessa tal som sina nollställen.

1. Är detta en funktion från $D = \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ till $P =\{$ andragradspolynom $\}$?

2. Kan du finna en delmängd B av målrummet P, så att det blir en funktion f?

3. Vad är bilden, $f(D)$, av din funktion? Är f surjektiv?

4. Är f injektiv? Ge argument.

5. Kan du finna en delmängd $A \subset D$ så att $g = f|_A : A \longrightarrow B$ är injektiv och $g(A) = f(A) = f(D)$? (Här betecknar $f|_A$ restriktionen av f till A, d v s $f|_A(a) = f(a)$ för alla $a \in A$.)

6. Kan du representera B som en delmängd av $\mathbb{R}^2$, d v s kan du hitta injektiv funktion $h : B \longrightarrow \mathbb{R}^2$?

7. Kan du hitta en invers till funktionen $g : A \longrightarrow g(A)$? I så fall ta fram den.

8. Försök nu besvara alla dessa frågor om de två nollställena får väljas fritt i $\mathbb{R}$, d v s låt $D = \mathbb{R}^2$.

9. Med hjälp av funktionen h från uppgift 6, så får vi två sammansättningar $h \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ och $h \circ g : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Är dessa injektiva eller surjektiva? Bestäm en formel för dessa sammansättningar.

Inlämningsuppgift 3

Låt n vara ett fixt positivt heltal. Vi inför en relation på $\mathbb{Z}$ som kallas 'kongruens modulo n'. Denna definieras så här: x är kongruent med y modulo n, skrivs $x \equiv y \pmod{n}$, om och endast om $n|(x - y)$.

1. Visa att detta är en ekvivalensrelation.

2. Titta på de tre exemplen $n = 1, 2, 3$ i tur och ordning och bestäm de olika ekvivalensklasserna.

3. Fundera på hur ekvivalensklasserna kommer att se ut i allmänhet. Kan ni hitta något generellt sätt att välja precis ett element ur varje ekvivalensklass?

4. En ekvivalensklass brukar man beteckna med $[a]_n$ eller bara $[a]$ om det är klart vilket n man menar. Här är $[a]_n$ den ekvivalensklass där a ingår. Antag nu att man vill kunna addera och multiplicera ekvivalensklasserna. Vi försöker med följande definition:
   Addition: $[a]_n \oplus [b]_n := [a + b]_n$.
   Multiplikation: $[a]_n \odot [b]_n := [a \cdot b]_n$.

   Fundera över och diskutera vad dessa definitioner betyder och vad som kan vara problemet. Försök sedan visa att det inte är några problem, d v s att $[a]_n \oplus [b]_n$ och $[a]_n \odot [b]_n$ inte beror på vilka element a och b vi tar i ekvivalensklasserna $[a]_n$ och $[b]_n$.

5. Gör additions- och multiplikationstabeller för $n = 5$ och $n = 6$ enligt följande modell:

$\oplus$	$[a]$	$[b]$	$\cdots$
$[a]$	$[a] \oplus [a]$	$[a] \oplus [b]$	$\cdots$
$[b]$	$[b] \oplus [a]$	$[b] \oplus [b]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

   och motsvarande för $\odot$. Välj t ex $n = 2, 5, 6$. Finns det några identiteter? Vilka element har additiv respektive multiplikativ invers.

6. Antag nu att vi vill försöka definiera en partiell ordning på ekvivalensklasserna. Ger följande försök en väldefinierad partiell ordning?

   $$[a]_n < [b]_n \text{ om } a < b.$$

   Motivera!

7. Finn ett naturligt tal a sådant att $0 \leq a < 7$ och $a \equiv 1999^{2000} \pmod{7}$.