Matematik D1
del A – ht 00

Extra övningar om relationer

1. Bestäm, för var och en av följande relationer, om den är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv. (Tänk på binärrepresentation i uppgifter 2 och 3.)

   (a) xRy *omm* x vet vad y heter, på mängden $\{t \mid t \text{ går i D1}\}$.

   (b) xRy *omm* $x + y$ är udda, på $\mathbb{N}$.

   (c) xRy *omm* $x + y$ är jämnt, på $\mathbb{N}$.

   (d) xRy *omm* x är minst lika lång som y, på $\{t \mid t \text{ går i D1}\}$.

   (e) aRb *omm* $a \subseteq b$, på $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (potensmängden till $\mathbb{N}$).

   (f) $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$, på $A = \{a, b, c\}$.

   (g) xRy *omm* $x = 2y$, på $\mathbb{N}$.

   (h) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, c), (c, a)\}$, på $A = \{a, b, c\}$.

   (i) xRy *omm* x är parallell med y (x har samma lutning som y), på mängden av alla linjer i planet.

2. Gör en Haskell-funktion som givet de nödvändiga inparametrarna (här krävs lite eftertanke!) avgör om en relation har någon av de fyra egenskaperna.

3. Skriv en Haskell-funktion som givet två relationer R_1 och R_2 ger sammansättningen $R_1 \circ R_2$.

4. Antag att man har två relationer R_1 och R_2 samt de matriser A och B som representerar dem. Hur kan man då bilda matrisen för sammansättningen $R_1 \circ R_2$? (Var måste det finnas ettor i A och B för att vi ska få en etta på en given plats i matrisen för sammansättningen?)

5. Ett matematiskt program som är lämpat för matriser och som samtidigt är lätt att använda är Matlab. För att starta detta ger man bara kommandot Matlab i ett terminalfönster (kanske måste ni aktivera Matlab först. Ge kommandot `rcopt`).

   . Man matar in en matris radvis med mellanrum mellan element på samma rad och 'ny rad' mellan raderna och hakparenteser '[' och ']' som avgränsare.

   Ex: $A =$ [1 1
   0 1] ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Man kan definiera produkten av två $n \times n$-matriser A och B som $C = A * B$ genom att sätta

   $$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

   Titta på följande exempel för att lättare förstå vad detta betyder:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bv \\ cx + dz & cy + dv \end{bmatrix}.$$

För att multiplicera två matriser A och B (om de har 'lämpliga' storlekar) i MATLAB skriver man bara $A * B$. Låt nu A och B vara matriser som representerar två relationer. Jämför matrisen för sammansättningen av de två relationerna (som ni ju bestämde i uppgift 4) och $A * B$. Hur kan man få matrisen för sammansättningen om man har $A * B$?

Ett användbart kommando för att testa lite är följande som ger en 'slumpmässig' relationsmatris för en relation på en mängd med n element: rand(n)>0.5. (Man måste ersätta n med ett specifikt positivt heltal.)

6. Hur många reflexiva, symmetriska respektive antisymmetriska relationer finns det på en mängd med n element? Vad är chansen att en slumpmässig (i er mening) relation är reflexiv, symmetrisk respektive antisymmetrisk? Testa detta genom att göra ett antal slumpmässiga relationer på en mängd med något fixt antal n element. Stämmer praktiken överens med teorin?

7. Låt $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ och $\mathcal{P}(M_N) = \{A : A \subseteq M_N\}$. Undersök vad $\mathcal{P}(M_N)$ blir för några små värden på N. Titta nu på relationen på $\mathcal{P}(M_N)$ given av $\subseteq$. Är detta en total ordning? Rita Hasse-diagram för de val av N ni gjort ovan. Ser ni något mönster?

8. En *övertäckning* av en mängd M är en samling delmängder till M som *täcker* M, d v s

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i,$$

där I är någon *indexmängd*. En övertäckning skiljer sig från en partition i att mängderna i övertäckningen inte nödvändigtvis är disjunkta. Vi definierar nu en relation R på M given av:

$$aRb \iff \exists i \in I \text{ s.a. } a \in M_i \text{ och } b \in M_i.$$

Vilka relationsegenskaper har alltid relationen R oavsett vad M är? Omvänt, om ni har en relation med dessa egenskaper, hur kan man då få en övertäckning? (En sådan relation kallas *jämförbarhetsrelation.*)

Facit uppgift 1: R, S, RST, RA(?)T, RAT, $\emptyset$, A, R, RST.