Extra övningar om partiella ordningar och ekvivalensrelationer

1. Bestäm om relationen R, på mängden M_n, är en ekvivalensrelation och/eller partiell ordning. Rita, i sådana fall, den förenklade grafen eller Hassediagrammet, för $n = 3$.

   (a) Låt $M_n = A_n \times A_n$ där $A_n = \{0, \ldots, n-1\}$. Definiera relationen R på M_n genom
   $$< a, b > \ R \ < c, d > \iff \quad a \leq c \ \text{ och } \ b \leq d.$$

   (b) Definiera relationen R på mängden M_n av binära n-bitars ord genom
   $$(x_1 x_2 \cdots x_n) \, R \, (y_1 y_2 \cdots y_n) \iff x_i \leq y_i \text{ för alla } i.$$

   (c) Låt M_n vara mängden av alla binära strängar av längd n. Definiera operationen $*$ på M_n genom $x * y = z = z_1 z_2 \cdots z_n$ där $z_i = 0$ om $x_i = y_i$, och $z_i = 1$ annars. Exempel: $0011 * 0110 = 0101$. Definiera nu relationen R på M_n genom
   $$xRy \iff x * y \leq y.$$

   (d) Definiera relationen R på mängden av binära strängar av längd $n \geq 0$ genom
   $$xRy \iff x_i \cdot y_i \leq y_i \quad \text{för alla } i,$$
   där $x = (x_1, \ldots, x_n)$ och $y = (y_1, \ldots, y_n)$ och $\cdot$ är vanlig multiplikation.

   (e) Låt M_n vara mängden av alla delmängder i $\{1, 2, \ldots, n\}$. Låt $\mathbb{P}$ vara mängden av alla positiva heltal och definiera $\overline{A}$ som $\overline{A} = \mathbb{P} \setminus A$, om $A \subset \mathbb{P}$. Definiera relationen R på M_n genom
   $$ARB \iff \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

2. Definiera relationen S på mängden av alla heltal genom att sätta
   $$xSy \iff x + 2y \equiv 0 \pmod{3}.$$
   Visa att S är en ekvivalensrelation och ange det tredje minsta positiva elementet i varje ekvivalensklass.

3. Låt $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ där $\mathbb{R}^+$ är mängden av alla positiva reella tal. Definiera relationen S på M genom
   $$(a, b)S(c, d) \iff a + b = c + d.$$
   Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna (som delmängder i planet $\mathbb{R}^2$).

4. Låt M_n vara mängden av alla binära n–bitars ord. Låt $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiera relationen S på M_n genom att sätta $x_1 x_2 \cdots x_n S y_1 y_2 \cdots y_n \iff$ det finns en bijektion $\phi : [n] \to [n]$ så att $x_i = y_{\phi(i)}$ för varje i (m a o, om det går att "flytta runt" 1:orna i $x_1 x_2 \cdots x_n$ så att man får $y_1 y_2 \cdots y_n$.) Exempel: $0101S1100$ och $11001S10101$, men *inte* $101S100$.

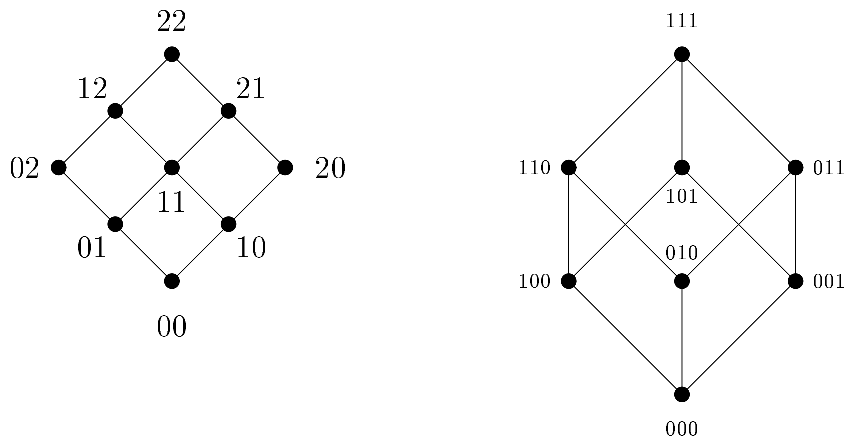
   Visa att S är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna.

Facit

1. Relationen i (d) är enbart en ekvivalensrelation, medan de andra är enbart partiella ordningar.

   Den förenklade grafen till ekvivalensrelationen i (d) är den *fullständiga* grafen med 9 noder, d v s grafen med 9 noder där varje par av noder har en kant sinsemellan.

   Nedan är Hassediagrammen för (a) till vänster och för (b), (c), (e) (med lämpliga modifieringar av nodnamnen) till höger.



2. Det tredje minsta positiva elementet i de respektive ekvivalensklasserna: 7, 8, 9.

3. Ekvivalensklasser: Alla linjer med lutning -1.

4. Det finns $n+1$ ekvivalensklasser, som var och en består av alla strängar med ett fixt antal ettor. En sådan klass, för $n=4$, är $\{0011,\ 0101,\ 0110,\ 1001,\ 1010,\ 1100\}$.