Uppgiftshäfte 2

Övningens syfte

Vi introducerar *matriser* som linjära avbildningar och tittar speciellt på vilka egenskaper som gör att avbildningarna kallas *linjära*. Sedan tittar vi på begreppen *inversfunktion, inversmatris* och *areaförändring* och sätter slutligen dem alla i relation till begreppet *determinant*.
Vi berör stora delar av kapitel 2 i boken (fast här håller vi oss till 2 dimensioner ännu så länge) och dessutom har vi också med axplock ur kapitel 4.1, 4.4, 6.1 och 9.5.

Påminnelse

Vi påminner igen om att ni bör titta på inrutade uppgifter enskilt till nästa gång ni ses. Då kan ni diskutera era lösningar och hjälpas åt med de som ni inte lyckades lösa.

En 2×2 matris är ett schema av tal på följande form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Här är några exempel på matriser som vi skall studera i detta häfte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En matris multipliceras med vektorer i planet på följande vis:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Två 2×2 matriser multipliceras på följande sätt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}.$$

I Matriser som avbildningar

1. En 2×2 matris ger, m h a ovanstående multiplikation med vektorer, upphov till en funktion. Hur då? Ange definitionsmängd och målmängd. (Man säger att matrisen *verkar* på punkter i planet.)

   Kanske ordet ortsvektor bör komma in i din förklaring.

2. Räkna ut hur matrisen A ovan verkar på punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. D v s bestäm

   $$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Rita en bild, med två kopior av planet, som visar hur dessa punkter avbildas m h a matrisen.

3. Gör samma sak för de återstående fem matriserna B, C, D, E, F. (Gör detta, även om det verkar tjatigt!)

4. Man kan dela upp matriserna A, B, C, D, E, F i två grupper beroende på hur de fyra punkterna ligger i förhållande till varandra efter verkan av matrisen. Varför blir det olika bilder för de två olika grupperna av matriser? Kan ni gissa det? D v s, kan ni hitta någon egenskap som särskiljer matriserna i den första gruppen från matriserna i den andra? Om ni kan det, kan ni bevisa att så är fallet?

   Lägg inte ned för mycket tid på denna uppgift nu. Vi återkommer.

J Linearitet

1. Undersök hur matrisen A ovan verkar på punkterna $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(5, 10)$. Vad är det som händer? Varför händer detta? Är punkterna slumpmässigt valda?

2. Visa att matrisen A ovan *avbildar* varje linje genom origo på någon linje genom origo. M a o, att givet en linje ℓ genom origo finns det en linje m genom origo så att varje punkt på ℓ skickas av A till en punkt på m. (Ledning: Skriv linjen på parameterform.)

3. Försök visa att vilken matris M som helst avbildar en linje genom origo på en linje genom origo.

4. Visa också att $M\binom{x}{y} + M\binom{z}{w} = M\left[\binom{x}{y} + \binom{z}{w}\right]$, för godtycklig 2×2 matris M.

   Vad ni har visat i denna och föregående uppgift är att en matris M ger upphov till en *linjär avbildning*.

5. Läs Sats 2.3 på sidan 151 i boken och "känn igen". Läs Definition 9.7 på sidan 417 i boken. Stämmer detta överens med påståendet att en matris ger en linjär avbildning?

6. Låt $\mathcal{R}$ vara parallellogrammet vars hörn är punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Vad blir $M(\mathcal{R})$, d v s vad blir *bilden* av parallellogrammet under funktionen given av M? Vad har $A(\mathcal{R}), B(\mathcal{R})$, etc. för form?

   Minns ni begreppet *bild* från introkursen?

7. Visa att en 2×2 matris avbildar ett parallellogram på ett parallellogram (möjligtvis ett degenererat parallellogram). (Ledning: Beskriv alla punkter i ett parallellogram som ortsvektorer givna som linjärkombinationer av två vektorer.)

8.* Vad gör A med en rät linje som *inte* går genom origo? Kolla ett par exempel och försök visa detta för en godtycklig matris M.

9.* Om ni har lyckats abstrahera skillnaden mellan matriserna A, B, C respektive D, E, F ovan, försök då visa att för varje linje (genom origo?) är bilden av en linje är en linje under verkan av varje matris av samma "typ" som A, B, C, men inte alltid under verkan av en matris av samma typ som D, E, F. Hur stämmer detta med ditt resultat i J2.

10. Gör uppgifterna 2.32 och 2.36 i boken.

K Invers

1. Beräkna $B \cdot A$. Beräkna nu $B(A\binom{1}{1})$ och $(B \cdot A)\binom{1}{1}$ och jämför reultaten? Blir det alltid så här oberoende av punkt och matriser?

2. Vad är den generella satsen som ovanstående är ett specialfall av?

   Nåt om associativitet.

3. Finn en matris M som avbildar $\binom{1}{1}$ på $\binom{2}{1}$ och $\binom{3}{1}$ på $\binom{4}{3}$, d v s så att

$$M\binom{1}{1} = \binom{2}{1} \text{ och } M\binom{3}{1} = \binom{4}{3}$$

   Kan ni skriva om dessa två ekvationer som *en* ekvation (som innehåller tre matriser).

4. Kan ni hitta en matris K som går tillbaka, d v s så att

$$K\binom{2}{1} = \binom{1}{1} \text{ och } K\binom{4}{3} = \binom{3}{1}?$$

5. Vad blir nu $KM\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Vad blir $MK\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Hur hänger detta ihop med begrepper invers funktion?

6. Finns det någon invers funktion till den linjära avbildningen given av $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

7. Finns det någon matris M så att $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ för alla (x, y)? Finns det många sådana? Ledning: Välj (x, y) med omsorg.

Lätt uppgift som kan vara svårlöst.

8. Vad är det som är så speciellt med $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? Vad blev KM och MK i uppgift K5?

9. Lös ekvationen $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ genom att hitta en matris B' så att $BB' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och sedan göra något klyftigt.

10. Vad har detta att göra med begreppet *invers* som vi lärde oss när vi studerade binära operatorer?

11. Påminn er själva om hur invers funktion ibland kan ses som inverst element m a p en operator. Funkar detta här? Vad är alltså inversa matrisen till en matris A?

12.* För vilka matriser M kan man hitta en matris M^{-1} så att $MM^{-1} = I$?

13.* Kan ni ge en formel för M^{-1} om $MM^{-1} = I$ och $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

$\boxed{14.}$ Gör uppgifterna 6.2a, 6.2b, 6.8c, 6.9 och 6.21 i boken.

L Area

1. Vad är arean av rektangeln $\mathcal{R}$ i uppgift J6? Vad blir arean av $K(\mathcal{R})$ i de två fallen då

$$K = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } K = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. Kan ni se något sambandet mellan talen i matrisen K och area av $K(\mathcal{R})$.

3. Låt $K = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Bestäm arean av $K(\mathcal{R})$. Funkar ert samband fortfarande?

4. Vad säger ert samband att arean av $K(\mathcal{R})$ är? Fick ni negativ area? Säg något vettigt om detta. Kolla t ex vad som händer med inbördes ordningen av vektorerna, som spänner upp $\mathcal{R}$, när M verkar på dem. (Vad menas med inbördes ordning?)

Försök inte smussla undan minustecknet när ingen tittar!

5. Formulera en sats med en formel för arean av $M(\mathcal{R})$ uttryckt i koefficienterna för den godtyckliga matrisen M.

6. Verifiera att din sats stämmer för areaorna av figurerna $A(\mathcal{R})$, $B(\mathcal{R})$, …, $F(\mathcal{R})$? Titta på fråga I4 igen.

7.* Bevisa din sats. Lista ut alla olika fall som måste behandlas och utred saken i varje enskilt fall.

8.* Formulera en liknande liknande sats fast för ett godtyckligt parallellogram.

$\boxed{9.}$ Gör uppgiften 4.21 i boken.

M Determinanter

1. *Determinanten* till en 2×2 matris $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är $Det(M) = ad - bc$. Känner ni igen detta uttryck? Var har du sett det tidigare under kursen?

2. Beräkna determinanterna till matriserna A, B, C, D, E och F.

3. Vad är förhållandet mellan $Det(M)$ och arean av $M(\mathcal{R})$? Titta nu på fråga I4 igen.

4. Finns det två olika punkter (x, y) och (z, w) så att $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, då $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$?

5. Visa att om $Det(M) = 0$, då finns det två olika punkter (x, y) och (z, w) så att
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

6. Vad har determinant med injektivitet att göra?

7. Vad vet vi nu om en determinanten av en matris som är inverterbar?

8. Ta reda på svaret till fråga L8. (Fråga någon eller lös den.) Använd detta fär att svara på följande fråga. Vad råder det för samband mellan $Det(M)$, $Det(N)$ och arean av $N(M(\mathcal{R}))$?

9. Låt $M = AB$. Vad vet vi om $Det(M)$? (Vad säger föregående uppgift).

10. Kan du argumentera för ditt svar i M7 igen, fast nu med utgångspunkt från ditt svar i M9?

11.* Kan du bli av med alla absoluttecken i fråga M9 genom att lista ut alla olika fall som måste behandlas och utred saken i varje enskilt?

12.* Visa påståendet i uppgift M10 algebraiskt.

$\boxed{13.}$ Gör uppgifterna 4.3a, 4.25 i boken.