Uppgiftshäfte 4

Övningens syfte

Vi tittar speciellt på kvadratiska ekvationssystem. Begreppen kärna och bild introduceras innan vi börjar studera egenvärden och tillhörande egenvektorer. Slutligen tittar vi på hur man kan ta fram matriser som motsvarar en önskad avbildning, t ex en rotation eller en projektion.

Kapitel i boken : 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 7.1–7.4

R Kvadratiska ekvationssystem

I hela det här avsnittet om determinanter är alla matriser av typ $n \times n$ för något n.
Vi har talat om determinanter för 2×2 och 3×3 matriser. För $n \times n$ matriser kan man definiera determinant rekursivt på följande vis.

Definition 1 *Välj ut en rad eller en kolonn i $n \times n$ matrisen A. Determinanten till A är då*

$$Det(A) = \sum_{rad/kol.} (-1)^{i+j} a_{i,j} Det(A_{i,j}),$$

där summan löper över alla a_{ij} i den rad/kolonn vi valt och $A_{i,j}$ är den matris som man får då man tar bort rad i och kolonn j, d v s den rad och den kolonn som a_{ij} står i.

Har vi t ex valt rad i, då blir det $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} Det(A)_{i,j}$

1. Använd definitionen ovan för att beräkna determinanten för en allmän 2×2 matris. Basfallet är nu 1×1 matriser. Vad är determinenten av sådana? Visa att valet av rad eller kolonn inte spelar någon roll genom att utveckla efter olika rader och kolonner?

Att det inte spelar någon roll vilken rad eller kolonn man väljer behöver man egentligen visa för att denna definition skall göra begreppet determinant väldefinierat. Man kan visa detta allmännt, men vi nöjer oss med att kolla det för $n = 2$ och 3..

2. Prova sedan med en allmän 3×3 matris. Blir resultatet det förväntade, oberoende av vald rad/kolonn?

3. Kan ni säga något om förhållandet mellan determinanten till A och determinanten till den matris man fått när man gjort A trappformad? Använd ditt svar i Q4.

4. Vad är determinanten av en triangulär matris,d v s av en matris som har enbart noller över, eller under, diagonalen? Vilka element i matrisen är inblandade?

5. Gäller det att: $Det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har exakt en lösning? Börja med att fundera på hur det fungerar för en trappmatris.

6. Vi vet att om A är en 2×2 matris så gäller att A inverterbar $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$. Med hjälp av uppgift R5 kan ni nu visa att detta gäller för en godtycklig $n \times n$ matris A, d v s att A är inverterbar om och endast om $det(A) \neq 0$. Att ge en formel för inversen är ganska komplicerat och det behöver ni inte göra.

Är inte detta trolleri? Att visa att inversen finns utan att ta fram den!!!!

7. Låt A vara en matris med kolonnvektorer $\mathbf{a}_i$, d v s $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ Visa att, för en kolonnvektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, gäller att $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$. Använd detta för att visa att A inverterbar $\Leftrightarrow$ A:s kolonner är linjärt oberoende.

Slå upp *transponat* om du inte vet vad t:et vid vektorn $\mathbf{x}$ betyder.

$\boxed{8.}$ Gör uppgifterna 4.7, 4.11c, 4.19c och 4.6 i boken.

S Kärna

Definition 2 *Låt A vara en matris. Kärnan av A är mängden*

$$Ker(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 3 *Låt A vara en matris. Bilden av A är mängden*

$$Im(A) = \{\mathbf{y}\,;\, \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \textit{för något}\ \mathbf{x}\}.$$

1. Beräkna $Ker(M)$ då M i tur och ordning är en av de 6 matriserna definierade i början på Uppgiftshäfte 1. Vad får ni för slags mängder?

2. Beräkna nu också $Im(M)$ för de 6 matriserna. Ser ni något samband med mellan dimensionerna på $Ker(M)$ och $Im(M)$.

3. Funkar detta samband också för matrisen $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Visa att en matris A ger en injektiv avbildning om och endast om $Ker(A) = \{\mathbf{0}\}$. Vad kan A vara för typ av matris för att ditt argument skall fungera?

5. Låt A vara en $n \times n$ matris och $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x}_1$ vara en (*partikulär*)lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}_0$ en lösning till det motsvarande homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Linearitet!

6. Vad har vi kallat lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet?

7. Ta fram tre olika lösningar till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Ligger lösningarna på samma linje? Är det alltid så? Vilken lutning har linjen jämfört med $Ker(A)$? Men detta är ju exakt samma övning som 5, eller hur?

8.* Antag att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Visa att *varje* lösning $\mathbf{x}$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, där $\mathbf{x}_0$ är någon lösning till det motsvarande homogena systemet. Enkel algebra (och ett (enkelt) knep)

$\boxed{9.}$ Gör uppgifterna 3.3, 3.33 och 3.34 i boken.

T Egenvektorer och egenvärden

1. Nu skall vi försöka förstå hur vi kan hitta de linjer som inte flyttas av en matris A.

   a) Låt $M = A - \lambda I$. Om $Det(M) = 0$, visa att det finns en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ledning: vad har vi kallat linjen genom origo som $\mathbf{x}$ ligger på?

   b) Visa att vi då har $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

   c) Visa att vi då även har $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ för varje $\mathbf{z} = k\mathbf{x}$ där $k \in \mathbb{R}$.

   d) Beskriv i ord vad detta säger om matrisen A:s verkan på planet.

   e) Hur hittar du nu linjerna som inte flyttas av en matris?

Definition: Låt A vara en matris och $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en vektor så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för något tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Då kallas $\mathbf{x}$ en *egenvektor* till A och λ ett *egenvärde* till A motsvarande $\mathbf{x}$.

2. Finn egenvärden och motsvarande egenvektorer till $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Var så lata som möjligt här

3. Låt A vara en matris som avbildar planet på en linje. Vad kan man säga om A:s egenvektorer?

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer för $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ då $a \neq b$, respektive $a = b$. Behövde ni räkna?

5. Vad kan man säga om en matris A som har 0 som egenvärde?

6. Vilka matriser har bara en egenvektor (bortsett från multiplar av denna)? Ledning: Om så är fallet, vad kan man då säga om de två egenvärdena (hur räknar man fram egenvärdena?). Ge exempel på en sådan matris.

7. Finns det matriser med två linjärt oberoende egenvektorer, men bara ett egenvärde? Beskriv alla sådana matriser.

8. Låt A vara en matris med egenvektor $\mathbf{x}$ och motsvarande egenvärde λ. Visa att $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$. Linearitet!

9. Låt A vara en matris med två linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ och låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Beskriv $A^n\mathbf{v}$ utan att använda A.

10. M är en matris som projicerar rummet ortogonalt på planet $x + 3y + 2z = 0$. Finn tre linjärt oberoende egenvektorer till M och motsvarande egenvärden. Behöver man ta fram M?

11. Diskutera vad en sådan matris har för egenskaper (egenvärden/vektorer, determinant, etc.).

12.* Finns det något samband mellan en matris egenvärden och dess determinant?

$\boxed{13.}$ Gör uppgiftera 3.30, 3.31, 7.13, 7.14, 7.3, 7.5, 7.6, 7.16b, 7.25*, 7.29 i boken.

U Att finna önskade rotationer, projektioner m.m.

1. Visa att om man vet hur en matris M verkar på vektorerna (1,0) och (0,1), då vet man vad M är för matris.

2. Använd föregående uppgift för att finna matrisen R_α som roterar planet α grader motsols. Skulle du kunna förutsäga matrisens determinant utan att ta fram matrisen först?

3. Visa att om man vet hur A verkar på två linjärt oberoende vektorer då vet man vad A är för matris. (Skriv en matrisekvation och lös den.)

4. Finn A så att A avbildar planet på linjen $y = 3x$. Ledning: Vad vet vi om A? Beskriv *alla* matriser som avbildar planet på linjen $y = 3x$.

5. Finn A så att linjen $y = 3x + 2$ avbildas på punkten (2,6).

6. Finn en matris som roterar rummet på något icke-trivialt sätt. Man kan med fördel tänka sig att man tittar på jordklotet utifrån och roterar det på olika sätt (inte nödvändigtvis alltid i samma axel).

7.* Hur kan man rotera planet runt en punkt $(x, y) \neq (0, 0)$?

$\boxed{8.}$ Gör uppgifterna 7.1, 7.2, 7.20, 7.22 i boken, samt uppgift 2 på tentan 991215.