Uppgiftshäfte 5

Övningens syfte

I Uppgiftshäfte 1 och på föreläsningarna har vi pratat om *baser* i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$. Vi generalisera nu detta till godtycklig (ändlig) dimension. Vi skall också studera *basbyten* och se något exempel på hur man kan ha nytta av dessa. En av skönheterna hos den linjära algebran är att den dyker upp överallt. Svårigheten kan dock vara att upptäcka den. Vi kommer i detta avsnitt titta på några exempel på "ickelinjära" objekt som kan behandlas med linjär algebra m h a begreppet *vektorrum.*
Kapitel i boken : 5.4, 8.1–8.3, 9.2–9.4, 9.7,9.8.

V Baser, igen

Definition 1 *Vektorer* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *sägs utgöra en bas för* $\mathbb{R}^n$ *om de är linjärt oberoende.*

Definition 2 *En vektor* $\mathbf{a}$ *skrivs på koordinatform, m a p basen* $\mathbf{u}$*, på följande vis:*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathbf{u}} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$

Om basen i fråga är standard basen (en ON-bas) skriver vi bara

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. Stämmer den översta definition överens med det vi kallat bas tidigare?

2. Låt
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Visa att vektorerna $\mathbf{u}_i$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

3. Uttryck vektorn $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i basen $\mathbf{u}$, och skriv den på koordinatform m a p basen $\mathbf{u}$.

4. Låt
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$
Skriv nu $\mathbf{p}$ på koordinatform m a p basen $\mathbf{v}$.

5. Visa att om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en bas så gäller
$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n \Longrightarrow a_i = b_i \,\forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

6. Visa att givet en bas så kan varje vektor skrivas på koordinatform på högst 1 sätt m a p den givna basen.

W Basbyte

1. Använd era resultat i V3 och V4 för att skriva

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{p} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2.$$

   där a_i och b_i är tal ni räknat fram. Kan ni skriva om detta som ett matrissamband på formen $U\mathbf{a} = V\mathbf{b}$?

2. Vad är egentligen **a** och **b** i föregående uppgift? Hur kan vi använt matrisinvers för att ge **p** på koordinatform m a p på basen **v** när vi redan kände till dess koordinatform m a p på basen **u**?

3. I föregående uppgift pratade vi om matrisinvers. Vet vi att denna invers alltid finns i dessa sammanhang?

4. Formulera en sats som ger sambandet mellan vektorer på matrisform m a p två olika baser. Speciellt hur ser sambandet ut om ena basen är standardbasen. Det samband som er sats beskriver kallar vi ett *basbytessamband*.

X Linjära avbildningar, igen

1. Vi har i tidigare uppgifter tittat på definitionen av linjäravbildning på sidan 417 i boken. Visa nu att om man vet vad en linjär avbildning gör på basvektorer så vet man hur den avbildar godtyckliga element i vektorrummet.

2. Hur kan man nu skriva den linjära avbildningen som en matris? Observera att denna matris beror på vald bas.

3. Om vi nu antar att vi har en linjär avbildning som i en bas **u** ges av en matris A. Hur ser matrisen för denna linjära avbildning ut i i basen **v**?

4. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Vad blir matrisen för motsvarande linjära avbildning uttryckt i basen som utgörs av egenvektorerna till A?

6. Kan detta hjälpa er beräkna A^{1000}?

7. Ge den matris som roterar $\mathbb{R}^3$ ett kvarts varv runt z-axeln.

8. Använd basbyte för att finna den matris R som roterar $\mathbb{R}^3$ ett kvarts varv runt linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

9. Ange egenvektorerna till matrisen R.

$\boxed{10.}$ Gör uppgifterna 5.25, 5.27, 5.30, 8.1, 8.3, 8.5, 8.8, 8.11, 8.12 och 8.16 i boken.

Y Vektorrum

1. Studera definitionen, på sidan 410 i boken, av vektorrum. Undersök om mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ är ett vektorrum.

   Låter som en dum fråga!

2. Visa att mängden $P_3 = \{p(x) \text{ polynom } ; deg(p(x)) \leq 3\}$, är ett vektorrum. Vad är det nu som kallas vektorer?

3. Observera att polynomen $1, x, x^2$ och x^3 alla tillhör vektorrummet P_3. Använd vår definition för linjärt beroende, från Uppgiftslapp 3, för att visa att dessa tre "vektorer" är linjärt oberoende.

   Något om koefficienter i en linjärkombination som blir noll.

4. Förvissa er om att dessa fyra polynom spänner upp P_3, d v s att varje polynom i P_3 kan skrivas som en linjärkombination av dessa fyra polynom.

5. Dessa fyra polynom sägs nu utgöra en bas för P_3. Kan ni göra en ny definition av begreppet bas som inte bara behandlar bas för $\mathbb{R}^n$? Man vill att denna definition skall garantera att varje vektor ges av precis en linjärkombination av basvektorerna.

   Svårt? Ingen panik, de två efterföljande uppgifterna guidar vägen

6. Givet ett antal vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ låt

   $$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \{ \text{ alla linjärkombinationer } a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \}.$$

   Visa att $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ är ett vektorrum. Man säger att detta är vektorrummet som *spänns upp* av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

7. Vad antog ni om vektorerna i föregående fråga. Kan de vara polynom?

8. På hur många sätt kan man skriva ett element i $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$?

9. Visa att om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende så kan varje vektor i $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ skrivas som linjärkombination av basvektorerna på ett högst 1 sätt.

   Kan ni återanvända ert resonemang i V5?

10. Behövde ni anta något om vad vektorerna är i föregående uppgift? Kan de vara polynom i P_3 t ex?

11. Kan ni nu använda era resultat i Y9 och Y8 för att formulera en definition av begreppet bas som garanterar att varje element i vektorrummet kan skrivas på precis 1 sätt som en linjärkombination av basvektorerna.

12. Gör uppgifterna 9.4 och 9.13 i boken.

Z Fler exempel

1. Kan ni komma på något annat exempel på vektorrum? Hur är det till exempel med mängden $V_m = \{ \, 2 \times 2 \text{ matriser } \}$?

2. Visa att mängden av funktioner $V_f = \{ \, f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$ är ett vektorrum.

3. Förvissa er om att ert svar i fråga Y6 fortfarande gäller och att alltså

   $$F = \langle 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x \rangle$$

   är ett vektorrum. Rita gärna upp några av elementen i F med t ex matlab.

4.* Definiera en *skalärprodukt* på F genom

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Visa att denna uppfyller precis samma räkneregler som skalärprodukten i t ex $\mathbb{R}^2$. Läs sedan definitionen av skalärprodukt på sidan 419 i boken. Och vilka var de nu igen?

Jag skrev här $f \cdot g$ för att härma vår gamla beteckning för skalärprodukt, ofta skriver man istället $(f|g)$, eller (f, g). Då slipper man ju också blanda ihop det med vanlig multiplikation.

5.* Visa att $f = 1$ och $g = \sin x$ är ortogonala.