Uppgiftshäfte 6

Övningens syfte

Vad kan man göra ifall ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Finns det något $\mathbf{x}$ som minimerar felet i någon mening? Denna uppgiftslapp handlar om minsta kvadratmetoden som är en flitigt använd metod för att anpassa modeller till data.
Kapitel i boken : 3.5

Å Minstakvadratmetoden

1. Betrakta matrisavbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ given av matrisen

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Visa att $Im(A)$ är ett plan. Bestäm ekvationen för detta plan på formen $Ay_1 + By_2 + Cy_3 + D = 0$.

2. Betrakta ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

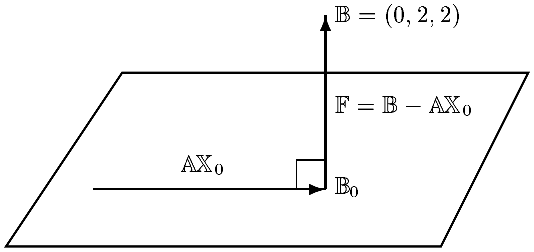
Är detta system lösbart?

3. Bestäm alla högerled för vilka systemet är lösbart.

4. Ekvationssystemet ovan är inte lösbart eftersom alla lösningar $\mathbb{AX}$ ligger i ett plan och punkten $\mathbb{B} = (0, 2, 2)$ ligger inte i det planet. Vilken punkt blir den bästa approximationen till högerledet?

5. Vad blir lösningen av ekvationssystemet med det nya högerledet?

6. Betrakta figuren. I föregående övning skulle ni bestämma vilken punkt i planet som gav den bästa approximationen. Förhoppningsvis valde ni högerledet så att felvektorn $\mathbb{F}$ blev så kort som möjligt. D v s, eftersom



$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 - x_2 \\ 2 - 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

innebär det att minimera

$$|\mathbb{F}| = \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + (2 - x_1 - x_2)^2 + (2 - 2x_1 + x_2)^2}.$$

Kvadratsumman under rottecknet skall alltså minimeras; därav namnet *minstakvadratmetoden.*

7. Ett enkelt geometriskt sätt är att välja högerledet $\mathbb{B}_0$ så att felvektorn $\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{AX}_0$ är vinkelrät mot planet $3y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$. I förra övningen räknade vi fram lösningen genom att först beräkna $\mathbb{B}_0$. Vi skall nu ta fram en metod där vi slipper beräkna det nya högerledet för att hitta lösningen.

$$\begin{array}{cc} & \mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{AX}_0 \text{ har minimal längd} \\ \iff & \mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{AX}_0 \perp \text{planet} \\ \iff & \mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{AX}_0 \perp \text{varje vektor i planet} \\ \iff & \mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{AX}_0 \perp \mathbb{AX} \quad \forall \mathbb{X} \\ \iff & \mathbb{AX} \cdot (\mathbb{B} - \mathbb{AX}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\ \iff & (\mathbb{AX})^t (\mathbb{B} - \mathbb{AX}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\ \iff & \mathbb{X}^t \mathbb{A}^t (\mathbb{B} - \mathbb{AX}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\ \iff & \mathbb{X}^t (\mathbb{A}^t \mathbb{B} - \mathbb{A}^t \mathbb{AX}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\ \iff & \mathbb{A}^t \mathbb{AX}_0 = \mathbb{A}^t \mathbb{B} \end{array} .$$

Sätt nu in siffrorna från tidigare och lös systemet!

8. Räkna ut felvektorns längd.

9. Formulera en sats som säger hur man, för det olösliga ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kan beräkna $\mathbf{x}_0$ så att $|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ för alla $\mathbf{x}$.

$\boxed{10.}$ Gör uppgifterna 3.47, 3.50, 3.51 och 3.62 i boken.