Kortfattade lösningar till några uppgifter

A Vektorer

2. Vi ges en relation på mängden av riktade sträckor som vi skall visa är en ekvivalensrelation, dvs att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

reflexivitet: Den riktade sträckan $\mathbf{x}$ har ju samma längd som sig själv och även samma riktning som sig själv, alltså gäller $\mathbf{x}R\mathbf{x}$.

symmetri: Om $\mathbf{x}$ har samma längd som $\mathbf{y}$ har ju $\mathbf{y}$ samma längd som $\mathbf{x}$. P.s.s. med deras riktningar.

transitivitet: Om $\mathbf{x}$ har samma riktning som $\mathbf{y}$ och $\mathbf{y}$ har samma riktning som $\mathbf{z}$, har ju $\mathbf{x}$ samma riktning som $\mathbf{z}$. P.s.s. med deras längder.

C Skalär produkt

4. Vi använder att $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 1|\mathbf{x}|^2$ för att se att

$$VL = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = HL-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Detta betyder att VL=HL precis då $0 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, d v s då $\alpha = \pi/2$.

D Vektorprodukt

3. Arean av ett parallellogram ges av $B\cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren i avsnittet i fråga (där vi nu tänker oss att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^3$) ser vi att $B = |\mathbf{u}|$ och $h = |\mathbf{v}\cdot\cos\alpha$ där α är vinkeln mellan vektorerna. Vi inser att arean ges av $B\cdot h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}\cdot\sin\alpha = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$

E Volym

4. Volymen ges av $B\cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren ser vi att $B = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ och $h = ||\mathbf{a}|\cos\alpha|$ där α är vinkeln mellan $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ och $\mathbf{a}$. Vi finner att volymen ges av $B\cdot h = |\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos\alpha\,| = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

$\boxed{\boxed{\text{G}}}$ **Plan**

3. Om punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ligger i ett plan som har normalvektor $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ så måste ju vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ vara en vektor i planet, d v s den måste vara ortogonal mot normalen. Detta betyder att

$$0 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0).$$

Flyttar vi om lite får vi

$$n_x x + n_y y + n_z z - n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0 = 0$$

som då är skrivet på den vanliga formen $Ax + By + Cz + D = 0$.

$\boxed{\boxed{\text{I}}}$ **Avbildningar**

4. Matriserna A, B och C avbildar planet på hela planet, men D, E och F avbildar planet på linje. De kan t ex karakteriseras av att en rad är en multipel av en annan (linjärt beroende), eller av att $ad - bc = 0$ (determinant lika med noll).

$\boxed{\boxed{\text{J}}}$ **Lineraritet**

3. Varje linje i planet som passerar genom origo och genom punkter $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan skrivas

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix}.$$

Punkterna på denna linje avbildas nu av $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ till punkterna

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ar_1 + br_2)t \\ (cr_1 + dr_2)t \end{pmatrix}$$

som är en linje m genom origo (t=0). Om $\begin{pmatrix} (ar_1 + br_2) \\ (cr_1 + dr_2) \end{pmatrix}$ skulle råka vara $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avbildas linjen ℓ inte på alla punkter på en ny linje utan bara på origo.

8. En godtycklig linje kan skrivar $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}, t \in \mathbb{R}$, där vi kan säga att $\mathbf{p}$ anger en startpunkt (t=0) och $\mathbf{r}$ anger riktningsvektor. Lineariteten ger då att $A(\mathbf{r}t + \mathbf{p}) = (A\mathbf{r})t + A\mathbf{p}$ som är en ny linje med startpunkt $A\mathbf{p}$ och riktningsvektor $A\mathbf{r}$. Observera att det kan vara så att den nya linjen går igenom origo trots att $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}$ inte gjorde det.

$\boxed{\text{K}}$ **Invers**

8. Jo, $IA = AI = A$ för alla 2×2 matriser A. Kolla t ex genom

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 + b0 & a0 + b1 \\ c1 + d0 & c0 + d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

9. Vill hitta $B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ så att $B'B = I$, d v s så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = B'B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & 2x + 5y \\ z + w & 2z + 5w \end{pmatrix}.$$

Får fyra ekvationer ur vilka jag kan bestämma de fyra obekanta. Finner att $A' \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Om vi nu skall lösa $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan vi multiplicera bägge led från vänster med B'. Vå får då $B'B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Då $B'B = I$ och finner vi att $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Klyftigt va?

$\boxed{\text{M}}$ **Determinant**

5. Om determinanten är noll är en rad en multipel av en annan. Låt anta att det är andra raden som är en multipel av den första. Då har matrisen formen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$. Nu vet vi att origo alltid går på origo, men vi ser dessutom att alla punkter på linjen $ax + by = 0$ också går på origo.

$\boxed{\text{P}}$ **Ekvationslösning**

3. Vi får matrisekvationer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

där i ena fallet $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$ och i andra fallet $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vi inser att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ har determinant noll och vi vet då att planet avbildas på en linje, som i detta fall är linjen $\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$. Om $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ligger på denna linje finns det punkter som avbildas med matrisen på denna punkt. Detta är fallet i första ekvationssystemet och vi kan se att alla punkter på linjen $x + 2y = 25$ är lösningar till ekvationssystemet. I det andra fallet så ser vi att $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ inte ligger på linjen och därmed finns ingen punkt som avbildas på $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ och därmed finns inga lösningar till ekvationssystemet.

Q Determinant

4. Om man går igenom de elementära radoperationerna och ser vad de gör med determinant finnar man att de högst kan ändra determinanten med en faktor skiljd ifrån noll.

S Kärna

4. Antag att $\mathbf{x}_1$ är en partikulär lösning, d v s att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, och att $\mathbf{x}_0$ är en homogen lösning, d v s att $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Då ser vi att

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

T Egenvektorer och egenvärden

8. Induktion. Basfallet $n = 1$ klart. Antag nu att $A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda^{n-1}\mathbf{x}$. Skall visa att $A^n(\mathbf{x}) = \lambda^n\mathbf{x}$. Ser att

$$\mathrm{VL} = A^n\mathbf{x} = A^{n-1}(A\mathbf{x}) = A^{n-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda\lambda^{n-1}\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \mathrm{HL}.$$

9. I planet kan varje vektor $\mathbf{v}$ fås som linjärkombination av de två linjärt oberoende vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, d v s $\mathbf{v}$ kan skrivas $\mathbf{v} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

Detta ger att

$$A\mathbf{v} = A(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = sA\mathbf{x} + tA\mathbf{y} = s\lambda_1\mathbf{x} + t\lambda_2\mathbf{y}.$$

D v s vi vet verkan av A på $\mathbf{v}$ om vi känner A’s egenvektorer och egenvärden.