Uppgiftshäfte 1

Övningens syfte

Att skapa spelplanen där vi så småningom kommer introducera linjära avbildningar. Vi studera begreppen *vektor, linje* och *plan*, operatorer och räkneregler samt tillämpar begreppen på avstånds-, area- och volymsberäkningar. Detta häfte behandlar begreppen i kapitel 1, utom kapitel 1.6. Beräknad tidsåtgång: 4 gruppövningstillfällen.

A Vektorer

1. Låt $V = \{$alla riktade sträckor i planet$\}$ och låt

$$R = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V};\ \mathbf{x} \text{ och } \mathbf{y} \text{ har samma längd och samma riktning}\}$$

   Visa att R är en ekvivalensrelation på V.

2. Man kan definiera vektorer genom att säga ett en vektor är en ekvivalensklass till ovanstående relation. Ett element i V kan beskrivas som ett punktpar $\mathbf{x} = (A, B)$, där man tänker sig att sträckan utgår från A och slutar i B. Ge exempel på två olika punktpar som representerar samma vektor, d v s som ligger i samma ekvivalensklass m a p R.

   Man skriver ofta $\overline{AB}$ istället för (A, B).

3. Finns det något bra sätt att välja ut en extra enkel representant för en ekvivalensklass?

4. Är det något i de uppgifter ni gjort hittills som måste ändras om vi vill definiera vektorer i rummet, eller i ännu högre dimension.

5. Kan ni ge exempel på en "vardaglig" situation där något kan betraktas med hjälp av vektorer.

B Operatorer, baser m.m.

1. Vilka binära operatorer finns på vektorer? Hur fungerar det t ex med addition? Hur ser det ut geometriskt? Vilka egenskaper har denna operator, är den t ex kommutativ?

2. Hur är det med multiplikation?

3. Hur multipliceras en vektor med ett tal? Hur ser det ut geometriskt?

4. Genom att välja ut två vektorer $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ i planet, som inte ligger i en linje (d v s som inte är parallellel med en och samma linje), får man en *bas* för planet. Då blir *linjärkombinationen* $a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y$ en vektor som man helt kort beteckna

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$

   Man säger att man skrivit vektorn på koordinatform. Visa att varje vektor i planet kan skrivas på koordinatform på ett unikt sätt m a p den valda basen.

5. Hur ser $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ ut på koordinatform? Hur adderar man vektorer skrivna på koordinatform och hur multiplicerar man med skalär.

6. Hur många basvektorer behöver man i rummet, och vad måste jag ställa för krav på dessa för att de skall utgöra en bas? Kan du generalisera till högre dimensioner?

7. Gör uppgifterna 1.5 och 1.11 i boken.

C Skalärprodukt

1. Läs definitionen av skalärprodukt längst ner på sidan 28 i boken och tänk efter vad som menas med “vinkeln mellan två vektorer”.

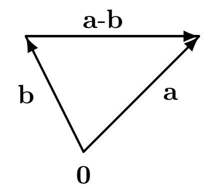
2. Är skalärprodukt kommutativ? Hur ser ni det? Är skalärprodukt distributiv över addition? Är skalärprodukt en operator?

   För den näst sista frågan konsultera Sats 1.2 sid 30.

3. Undersök vad skalärprodukten blir i de två extremfallen då de två vektorerna är vinkelräta samt då de sammanfaller.

4. Betrakta figuren till höger. Låt **a** och **b** vara två vektorer i $\mathbb{R}^2$. Enligt Pythagoras sats vet vi att om **a** och **b** är vinkelräta så gäller
$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$
   Vad är det som ”saknas” i högerledet? Vad måste vara 0 för att
   a och **b** skall vara vinkelräta? Ge ett bevis av cosinus-satsen, och ett för Pythagoras sats.

   Skulle detta fungera även om vektorerna låg i $\mathbb{R}^3$?

   Utgå t ex från $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

5. Tag två godtyckliga vektorer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ i planet. Beräkna $\cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Uttryck svaret i a, b, c, d. Kanske hjälper det er att börja med att anta att en av vektorerna ligger i x-axeln.

   Detta är en lite svårare uppgift, och kräver bland annat lite additionsformler för cosinus.

6. Använd nu detta för att ge en formel för skalärprodukten $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ uttryckt i a, b, c och d.

7. Låt $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ vara en ON-bas (slå upp i boken). Kan du beräkna skalärprodukten av $a\,\mathbf{e}_x + b\,\mathbf{e}_y$ och $c\,\mathbf{e}_x + d\,\mathbf{e}_y$ genom att använda skalärproduktens egenskaper.Hur stämmer ditt resultat med ditt svar i föregående uppgift? Kan du generalisera till vektorer i $\mathbb{R}^n$?

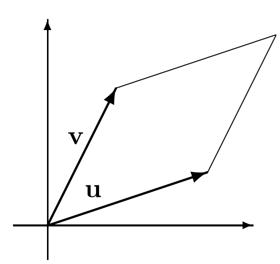
8.* Låt
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
   Hur kan man hitta en vektor **z** som är vinkelrät mot **x** och **y**? (Lös ett ekvationssystem. Ändra längden på **z** på slutet så att det blir snyggt.)

$\boxed{9.}$ Gör uppgifterna 1.35, 1.38, 1.39, 1.40, 1.42, 1.46, 1.49, 1.50.

D Vektorprodukt

1. Vilken formel brukar ni använda för att räkna ut arean av en triangel eller ett parallellogram? Dessa formler brukar handla om “höjden” och “basen”. Använd nu detta för att uttrycka arean av parallellogrammet i figuren i vektorernas längder och vinkeln mellan dem.

2. Hur blir det om vinkeln mellan **u** och **v** är trubbig, d v s om den är $> \frac{\pi}{2}$.



3. Slå upp definitionen av vektorprodukt. Känner ni igen något uttryck? Ge att uttryck (i vektorprodukt) för arean av ett parallellogram som spänns upp av två vektorer i $\mathbb{R}^3$?

4. Är vektorprodukt en operator? Låt $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vara ON-bas i rummet som utgör ett högersystem (slå upp i boken). Undersök vad vektorprodukten mellan basvektorer blir. Är operatorn kommutativ? Associativ?

5. Vad blir vektorprodukten av en vektor med sig själv? Hur blir det i allmänhet för två parallella vektorer?

6. Är vektorprodukt distributiv över addition.

Konsultera Sats 1.5 sid 44.

7. Använd nu dessa kunskaper för att ge vektorprodukten av två vektorer uttryckta i basvektorer $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Jämför med ditt svar i Uppgift C8, om du gjort den.

8. Ge en explicit formel för arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ uttryckt i a, b, c och d.

Om ni inte tycker att man kan använda vektorprodukt i två dimensioner, bädda då in planet i $\mathbb{R}^3$ på lämpligt sätt.

9. Kan man generalisera vektorprodukt till $\mathbb{R}^4$?

$\boxed{10.}$ Gör övning 1.52, 1.54, 1.55, 1.57.

E Volym

1. I vilken ordning skall man "skriva" vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ i figuren för att få ett högersystem? Ett vänstersystem? (Finns det flera olika sätt? Hur många?)

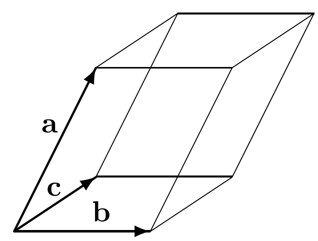
c pekar neråt, in i pappret.

2. Vad blir basarean av parallellepipeden i figuren?

3. Vad blir höjden?

4. Vad blir volymen av parallellepipeden?

5.* Volymen av tetraedern som spänns upp av **a**, **b** och **c** är en sjättedel av volymen av parallellepipeden som spänns upp av sammavektorer. Visa detta!



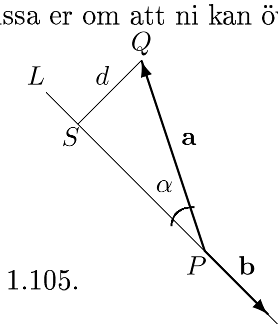
6. Vad blir volymen i tetraedern med hörn i $(2, 2, 1,), (4, 2, 1), (3, 5, 1)$ och $(3, 3, 2)$? Använd resultatet i E5, även om du inte bevisat det.

F Linjer

1. Ge exempel på information som är tillräcklig för att ange en linje i planet. Fungerar dessa lika bra för linjer i rummet?

2. Man kan representera linjer på olika sätt (vilka?). Förvissa er om att ni kan översätta mellan de olika sätten.

3. Hur kan man beräkna kortaste avståndet mellan en linje och punkt? (Titta på figuren där Q är den givna punkten och L är den given linje. P och S är punkter på linjen)



$\boxed{4.}$ Gör uppgifterna 1.69, 1.70, 1.71, 1.73, 1.80, 1.83 1.103, 1.105.

G Plan

1. Ge exempel på information som är tillräcklig för att beskriva ett plan i rummet.

2. Hur kan man få fram planets ekvation $Ax + By + Cz + D = 0$, med hjälp av den informationen?

3. Antag att

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

   är en vektor som är vinkelrät mot planet och att planet innehåller punkten $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Bestäm planets ekvation.

4. Kan ni nu ge en tolkning åt koefficienterna A, B och C i planets ekvation $Ax + By + Cz + D = 0$?

5. Kan man skriva ett plan på parameterform? Hur många parametrar behöver man då? Varför? Förklara geometriskt.

6. Fungerar dina representationer av plan även för plan i $\mathbb{R}^4$, och i $\mathbb{R}^n$ allmänt?

7. Gör övningarna 1.85, 1.86, 1.87.

H Linjer och plan

1. En rät linje i $\mathbb{R}^2$ har ekvationen $Ax + By = C$. Vad är vektorn (A, B)?

2. Varför räcker det med samma information, d v s en vektor och en punkt, för att beskriva ett plan som för en linje?

3. Punkterna $(-4, -2, 3)$, $(1, 3, -2)$, $(0, 3, -2)$ och $(5, -2, 0)$ utgör hörnen i en tetraeder. Vi skall nu beräkna volymen av en tetraeder på ett nytt sätt (jmf med metoden i E6). Bestäm planet som innehåller basen. Bestäm sedan den linje som är vinkelrät mot planet och som går igenom det återstående hörnet på tetraedern. Med hjälp av denna linje beräkna höjden, och sedan volymen av tetraedern.

4. Man skulle kunna se parametriseringen av en linje i $\mathbb{R}^3$ som en funktion från $\mathbb{R}$ in i $\mathbb{R}^3$. Beskriv denna funktion.

   I nästa uppgifthäfte kommer vi lära oss att dessa funktioner är exempel på *linjära avbildningar*.

5. På samma sätt som ovan kan man se parametriseringen av ett plan som en funktion från $\mathbb{R}^2$ in i $\mathbb{R}^3$. Beskriv även denna funktion.

6. Gör uppgifterna 1.88, 1.91, 1.95 1.98, 1.111.