Uppgiftshäfte 3

Övningens syfte

Vi lyfter blicken från planet och tittar lite på vektorer i $\mathbb{R}^n$ och matriser av typen $m \times n$. Sedan intresserar vi oss för begreppet linjärt beroende, innan vi slutligen börjar titta på hur man löser linjära ekvationssystem.
I detta uppgiftshäfte behandlar vi begrepp som finns i följande kapitel i boken :
2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1–5.3 och slutligen lite ur kapitel 5.4.

Enligt planerna kommer ni nu få ett nytt uppgiftshäfte varje torsdag under resten av kursen, utom sista veckan. Detta innebär alltså att det bli 6 uppgiftshäften allt som allt.

N Högre dimensioner

1. Hittills har vi tittat på 2×2 matriser och vektorer i planet, som på koordinatform kan ses som 2×1 matriser. Kan ni generalisera dessa begrepp till $n \times n$ matriser och $n \times 1$ matriser, d v s vektorer på koordinatform i $\mathbb{R}^n$.

2. Hur adderar man nu vektorer i $\mathbb{R}^n$? Hur multiplicerar man med skalär? Hur skalärmultiplicerar man två vektorer i $\mathbb{R}^n$?

3. Gäller samma räkneregler som i $\mathbb{R}^2$? Kan du bevisa det eller är det bara självklart?

4. Hur multiplicerar man en $n \times n$ matris med en vektor i $\mathbb{R}^n$. Hur multiplicerar man två $n \times n$ matriser med varandra? (Det kanske är bäst att börja fundera på hur det kan fungera för 3×3 matriser.)

5. Kan ni generalisera till $m \times n$ matriser, där m och n inte nödvändigtvis är lika. Dessa matriser ger upphov till en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Hur då?

6. Hur multiplicerar man en $m \times n$ matris med en $k \times l$ matris?. Går det alltid? Är multiplikation kommutativ?

7. Erinra er hur determinanten av en 2×2 matris M ger arean av $M(\mathcal{R})$, där $\mathcal{R}$ var ett parallellogram med area 1. Generalisera nu begreppet determinant från 2×2 matriser till 3×3 matriser genom att tänker er att determinanten skall ge volymen av $M(\mathcal{R})$ då $\mathcal{R}$ nu är en parallellepiped som spänns upp av vektorerna.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Här har man nytta av både skalärprodukt och vektorprodukt!

8. I den förra uppgiften kan determinanten bara bestämmas upp till tecken. Titta i boken, på sidan 234, hur determinant definieras för 3×3 matriser.

O Linjärt beroende

Definition 1 *Vektorerna $\mathbf{u}_i$ sägs vara linjärt beroende om det finns tal s_i, inte alla lika med noll, så att*

$$\sum_i s_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

1. Vad betyder det att två vektorer i planet är linjärt beroende? Vad säger detta om förhållandet mellan de två vektorers längder och riktningar? Beskriv vektorernas inbördes förhållande geometriskt?
2. Om man låter två linjärt beroende vektorer utgöra rader i en 2×2 matris, vad blir då den matrisens determinant?
3. Vad betyder det att tre vektorer i planet är linjärt beroende? När händer detta? Hur blir det för ändå fler vektorer?
4. Gör uppgifterna O1 men för två vektorer i rummet.
5. Ställ nu återigen samma frågor fast för tre vektorer i rummet.
6. Negera predikatet i definitionen för att få en definition av *linjärt oberoende*.
7. Kan man ha fyra linjärt oberoende vektorer i rummet?
8. Kan ni visa omvändningen till er slutsats i O2?

9.* Vad blir determinanten av den 3×3 matris som har tre linjärt beroende vektorer som rader.

10.* Kan ni visa omvändningen till slutsatsen i föregående uppgift?

P Linjära ekvationssystem

1. Gör uppgift 3.2 i boken.
2. Svaret i förra uppgiften är ett linjärt ekvationssystem. Läs på sidan 185 i boken och förrvissa er om att ni förstår vad ett linjärt ekvationssystem är.
3. Finn alla lösningar till de tre ekvationssystemen

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ 3x + 6y &= 75 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + 6y &= 7 \end{aligned}$$

4. Varje linjärt ekvationssystem kan skrivas på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hur då? Hur är typen av *koefficientmatrisen* A relaterat till antalet obekanta och antalet ekvationer.
5. Skriv ekvationssystemen i P3 som matrisekvationer. Lös nu ekvationssystemen genom att använda koefficientmatrisernas inverser, om det går.
6. Förklara geometriskt varför det blir olika svar. Vad har den linjära avbildningen, given av koefficientmatrisen, för egenskaper?
7. Relatera observationerna i föregående uppgift till begreppen determinant och linjärt beroende.
8. Totalmatrisen till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är matrisen $(A|\mathbf{b})$, där $|$ bara markerar ett lodrät streck genom matrisen. Skriv upp totalmatriserna för ekvationssystemen i P3.

9. På föreläsningen bad jag er läsa om elementära radoperationer, Gausselimination och bakåtsubstitution. Gör uppgift P3 igen, om ni inte använde Gausselimination på totalmatrisen förra gången ni gjorde uppgiften.

10. Lös systemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & 12. \end{array}$$

Bestäm sedan $f(x) = ax^2 + bx + c$ så att $f(-1) = 0$, $f(1) = 6$, och $f(2) = 12$.

$\boxed{11.}$ Gör följande uppgifterna 3.7, 3.11, 3.12, 3.13, 3.29, 3.30* . Bestäm även vattenflödet i åarna i uppgift 3.2. Gör gärna många fler av uppgifterna i 3.6.2.

Ni måste kunna Gausseliminera om man så väcker mitt i natten