Linjär algebra

Föreläsning 1

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

Kursinformation

- Ert egna arbete betyder mest.
- Jobba i grupp, prata matematik.
- Jobba från början.
- Boka upp tid i almanackan för matematikstudier.
- 10 timmar matematik i veckan utanför schemlagd tid.
- Övningshäften
  - Öppna frågor
  - Delvis facit
- Föreläsningar tänkt vara
  - Sammanfattande
  - Övergripande
  - Motiverande, inspirerande
  - Extra vecka 5,6,7 torsdagar klockan 10-12
- Examination
  - Tenta 16 december
  - Inlämningsuppgifter, 2 bonuspoäng

Varför skall ni läsa linjär algebra?

- Kommande kurser, bland andra
  - Numeriska metoder
  - Fysik
- Linjär algebra förekommer som del i många matematiska tillämpningar.
- Inte sällan får linjär algebra industriella tillämpningar via annan matematik som tex optimering eller system av differential ekvationer.

Kursens innehåll

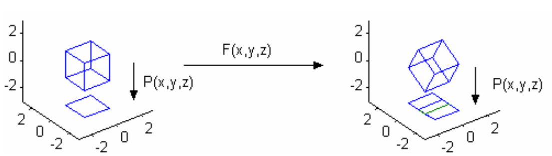
Vi kommer att ha två teman

- Linjära avbildningar
- Linjära ekvationer

Dessa uppkommer t ex i följande frågor.

Fråga 1: Hur kan jag på datorskärmen återge hur en kropp roterar i rummet?

Det kräver två avbildningar



Rotation F(x,y,z) och projektion P(x,y,z)

Båda dessa är exempel på **linjära avbildningar**.

Olika sätt att skriva rotationen

$$(u,v,w) = F(x,y,z) = (x, -0.5x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - 0.5y)$$

Detta kan skrivas på matrisform

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v} = A\mathbf{x}$$

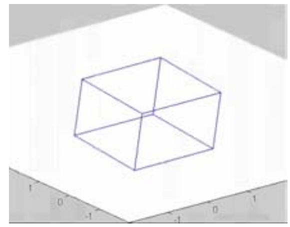
Olika sätt att skriva projektionen

$$(u, v, w) = P(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Detta kan skrivas på matrisform

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v} = A\mathbf{x}$$

Exempel i Matlab



Animation gjord i Matlab

Fråga 2

Samuel och Catherine är syskon. Samuel har dubbelt så många systrar som bröder. Catherine har lika många bröder som systrar. Hur många syskon är de?

$$\begin{cases} 2(p-1) &= f \\ f - 1 &= p \end{cases}$$

Detta är exempel på ett linjärt ekvationsystem.

På matrisform

$$\begin{cases} 2(p-1) &= f \\ f - 1 &= p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p - f &= 2 \\ -p + f &= 1 \end{cases}$$

Detta kan också skrivas

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Fråga 3

Antalet (hundratal) rävar y_n och kaniner x_n år n i en nationalpark modelleras med

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1.25x_n - 0.75y_n \\ y_{n+1} &= 0.25x_n + 0.25y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$$

Hur växer antalet djur med tiden?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots$$

Kommer de, enligt denna modell, att dö ut ?

Huvudaktörer

- Vektorer på koordinatform

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Matriser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$$

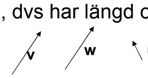
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Kolonn för kolonn som ovan. Prova själv

Okej, då börjar vi!

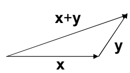
Vektorer och addition

En riktad sträcka, dvs har längd och riktning. OBS! Har ej placering.

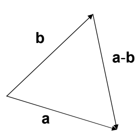


v = w ≠ u

Addition

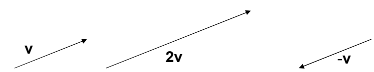


Ser då att



-**a** ha samma längd som **a** men motsatt riktning.

Multiplikation med skalär



$$\lambda\mathbf{v} = \begin{cases} \text{längd } |\lambda||\mathbf{v}|\text{, samma riktning som } \mathbf{v} & \text{om } \lambda \geq 0 \\ \text{längd } |\lambda||\mathbf{v}|\text{, motsatt riktning mot } \mathbf{v} & \text{om } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Linjärkombination

Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vekorer och a, b, c tal så kallas

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

en linjärkombination. Mer generellt kallas

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_k$

Bas

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sägs utgöra en bas för $\mathbb{R}^3$ om varje vektor **v** kan skrivas på formen

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$$

på ett unikt sätt

Vi skriver då

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z} \quad \text{eller bara } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Obs: $\mathbf{e}_x = 1\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bas i rummet, dvs i $\mathbb{R}^3$

Påstående: Om $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ inte ligger i samma plan så utgör de en bas.

Bevis:

ON-bas

En bas kallas en ortonormerad bas om basvektorerna är parvis ortogonala (vinkelräta) och basvektorerna är normerade (har längd 1).

Ordningen de skrivs i spelar roll!

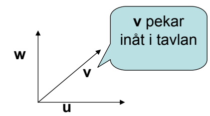
Orientering

Tre vektorer **u**,**v** och **w** sägs utgöra ett högersystem om

u pekar som tummen

v pekar som pekfingret

w pekar som långfingret



Tex utgör då **u**,**w** och **v** ett vänstersystem.

Skalärprodukt

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, där α är (minsta) vinkeln mellan vektorerna

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

2. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$

3. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$