# Linjär algebra

Föreläsning 2

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

# Idag

- Skalärprodukt
- Vektorprodukt
- Linjer och plan
  - Parametrisering
  - Ekvationer
- Matriser som avbildningar (på svarta tavlan)

# Skalärprodukt – vad?

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$

där $\alpha$ är (minsta) vinkeln mellan vektorerna

OBS: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dvs vektor · vektor = tal

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

# Skalärprodukt – hur?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Detta gäller i ON-bas på grund av nedanstående regler. Har ni fattat hur man inser det??

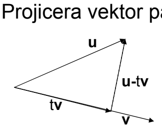
1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

# Skalärprodukt – varför?

Beräkna vinkeln mellan två vektorer.

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\sum_i u_i v_i}{\sqrt{\sum_i u_i^2}\sqrt{\sum_i v_i^2}}$$

Projicera vektor på vektor




$0 = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$

$\Rightarrow t = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

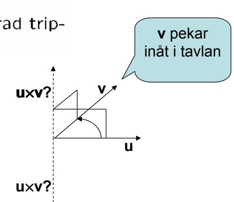
$\Rightarrow$ projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ ges av $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}$

Man kan använda detta för att beräkna avståndet mellan en punkt och en linje. Hur då?

# Vektorprodukt – vad?

1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är en högerorienterad trippel

OBS! $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dvs bara för vektorer i $\mathbb{R}^3$



# Vektorprodukt – hur?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$$

Detta gäller i högerorienterat ON-system pga nedanstående regler. Hur ser man det?

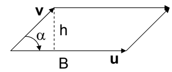
1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

2. $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

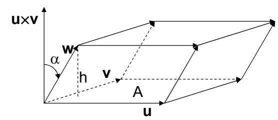
# Vektorprodukt – varför?

Area av parallellogram och triangel i $\mathbb{R}^3$ (även i $\mathbb{R}^2$,hur då?)




$B = |\mathbf{u}|$ och $h = |\mathbf{v}| \sin\alpha \Rightarrow$
$Arean = Bh = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\alpha = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

Volym av parallellepiped, tetraeder…




$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ och $h = |\mathbf{w}| \cos\alpha \Rightarrow$
Volymen $= Ah =$
$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

# Ekvationer för linjer och plan

Ekvation för linje i $\mathbb{R}^2$

ax+by=c generellare än y=kx+m

– Hur hittar jag denna givet två punkter på linjen?

Ekvation för plan i $\mathbb{R}^3$

Ax+By+Cz=D

– Hur hittar jag ekvationen givet tre punkter i planet?

# Ekvationer för linjer och plan, m.m.

Ekvationer för linje i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

•n-1 (generiska) linjära ekvationer i $\mathbb{R}^n$ ger en linje

•n-2 (generiska) linjära ekvationer i $\mathbb{R}^n$ ger ett plan

osv

# Annan information som bestämmer ett plan

1. Tre punkter i planet
2. Två vektorer och en punkt i planet $\leftrightarrow$ parametrisering
3. Normalvektor och en punkt $\leftrightarrow$ ekvation (bara i $\mathbb{R}^3$)
4. $\vdots$

# Parametrisering av linje

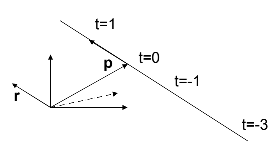
Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$t \to \mathbf{p} + t\mathbf{r}$$

Exempel, parametrisering av linje i rummet

Hur ändras detta om linjen ligger i tex $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$




Kan du gå mellan ekvation och parametrisering?

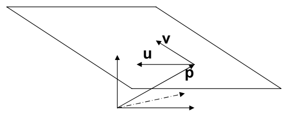
# Parametrisering av plan

Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$

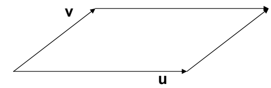
$$(s,t) \to \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Exempel, parametrisering av plan i rummet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}$$

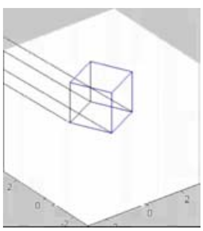



# Parametrisering av parallellogram




$$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, 0 \le s,t \le 1$$

# Matriser som avbildningar



Animering gjord i Matlab

Resten på svarta tavlan …