Linjär algebra

Föreläsning 3

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

Idag

- Linearitet
- Areaförändring
- Determinant
- Invers
- Samband mellan ovanstående
- Mer om parametriseringar (svarta tavlan)

Matriser ger linjära avbildningar

En 2×2-matris A ger en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

$$1.\ A(t\mathbf{u}) = tA\mathbf{u}$$

$$2.\ A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

medför att $F_A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aF_A(\mathbf{x}) + bF_A(\mathbf{y})$

Sådana funktioner kallas linjära funktion

Obs: säger funktionen A då borde säga ”funktionen F_A given av A”.

Några konsekvenser av linearitet

- Matriser avbildar linjer på linjer

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{p} + t\mathbf{r}) = A\mathbf{p} + A(t\mathbf{r}) =$$
$$A\mathbf{p} + tA\mathbf{r} = \mathbf{p}' + t\mathbf{r}'$$

- Pss avbildar matriser parallellogram på parallellogram

$$A\mathbf{x} = A(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = A(s\mathbf{u}) + A(t\mathbf{v}) =$$
$$sA\mathbf{u} + tA\mathbf{v} = s\mathbf{u}' + t\mathbf{v}', 0 \le s, t \le 1$$

Area av parallellogram och determinant

Sats: Låt R vara parallellogrammen som spänns upp av basvektorerna i $\mathbb{R}^2$ och låt matrisen A avbilda R på parallellogrammen P. Då gäller att om

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är Arean(P)=|ad-bc| =|Det(A)|

Talet ad-bc kallas för matrisen A’s determinant.

$$Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Bevis

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Area(P) = \left| \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix} \right| = |ad - bc| = |Det(A)|$$

När ger matrisen en injektiv avbildning

Vad skulle hända om alla var noll?

Jo, determinanten avgör det.
Antag att Det(A)=0

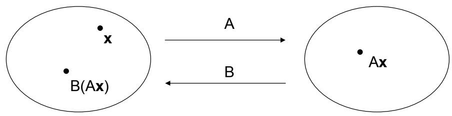
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Antag att } ad - bc = 0, \\ \text{inte alla lika med noll} \\ \text{antag tex } b \neq 0 \end{array} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{ad}{b}x + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ \frac{d}{b}(ax + by) \end{pmatrix} =$$

$$(ax + by)\begin{pmatrix} 1 \\ d/b \end{pmatrix}$$

Alla punkter på linjen $ax + by = \ell$
Avbildas på samma punkt, nämligen $\ell \begin{pmatrix} 1 \\ d/b \end{pmatrix}$

Invers funktion och invers matris



OBS B(A**x**)=(BA)**x**=BA**x** (associativa lagen)

B ger invers funktion till A om BA**x=x** och AB**y=y** för alla **x** dvs omm AB=BA=I. B kallas då invers matris till A, och man skriver B=A^{-1}.

Identitetsmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad I\mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad IA = AI = A$$

Invers matris i 2×2 fallet

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \\ az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases} \begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{d}{ad-bc} \\ y=\frac{-c}{ad-bc} \end{cases} \begin{cases} z=\frac{-b}{ad-bc} \\ w=\frac{a}{ad-bc} \end{cases}$$

Invers matris – hur och när?

Finner att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A har invers omm Det(A) ≠ 0.

Lite mer generellt om area av parallellogram

Sats: Låt R vara ett parallellogram och låt matrisen A avbilda R på parallellogrammen P. Då gäller att

Arean(P)=|Det(A)|·Arean(R)

Bevis på svarta tavlan

Vi har samtidigt bevisat att för 2×2-matriser gäller att

Det(AB)=Det(A)Det(B)

Några observationer

- Det(I)=1
- Det(AA^{-1})=Det(A)Det(A^{-1})
- 1=Det(I)=Det(AA^{-1})=Det(A)Det(A^{-1})
- A har invers ⇒ Det(A)≠ 0.
- Det(A^{-1})=1/Det(A)

Några sammanfattande samband

Följande är ekvivalenta påståenden för 2×2-matriser.

- A avbildar parallellogram på parallellogram med area 0
- Det(A)=0
- A saknar invers
- Avbildningen given av A är ej injektiv