Linjär algebra

Föreläsning 4

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

Idag

- Vad skall man nu med linjär algebra till?
- Högre dimensioner
- Linjärt beroende
- Linjära ekvationssystem

Fler exempel på nyttan av linjär algebra

- En lina en meter ovanför jorden!
- Linjära ekvationssystem, linearisering sin(x)≈ x
- Optimering och t ex kurvanpassning
- Sökmotorer
- Bildbehandling, morfning, fraktaler och kartprojektioner.

I högre dimensioner

m×n-matris ger funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

m×n · n×1=m×1

m×n · n×l=m×l

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1\ell} + \cdots a_{1n}b_{n\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1\ell} + \cdots a_{mn}b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$AB = A(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_\ell) = (A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_\ell)$$

$$A\mathbf{e}_k = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_\ell) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_k$$

Opererar kolonnvis

På plats ij har vi skalärprodukt mellan rad i ur A och kolonn j ur B

En n×n-matris kallas kvadratisk.

3×3-matriser och determinant

$$Det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Sarrus regel hjälper dig minnas detta

Om R är parallellepipeden som spänns upp av ON-basens basvektorer så kommer volymen av A(R) ges av |Det(A)|

Detta följer av att A(R) spänns upp av vektorerna $\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

$$Volymen(A(R)) = \left| \left(\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} dh - eg \\ bg - ah \\ ae - bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} \right| =$$

$$= |c(dh - eg) + f(bg - ah) + i(ae - bd)|$$

Samma som ovan

n×n-matriser och determinant

Finns två ekvivalenta definitioner, en om permutationer och en rekursiv. Vi väljer den rekursiva.

Genomgång på svarta tavlan

Linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Koefficientmatris

Högerled

Matrisekvation

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Kallas systemets **totalmatris**

Bilden av A, Im(A)

$$Im(A) = \{\mathbf{y}; \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Bilden av A spänns upp av kolonnvektorerna i A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning omm **b** $\in$ Im(A).

Då A är kvadratisk:

- om A har invers då finns unik lösning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- **b** $\notin$ Im(A) kan bara hända om Det(A)=0.

Parametrisering och dimensioner

En vektor spänner upp en linje $\mathbf{x} = t\mathbf{r},\ t \in \mathbb{R}$

Stämmer detta om $\mathbf{r} = 0$?

Nej då blir det bara en punkt - origo.

Två vektorer spänner upp ett plan $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v},\ s,t \in \mathbb{R}$

Stämmer detta om **u** och **v** är multipler av varandra?

Nej, då spänner de bara upp en linje, eller bara en punkt om båda är nollvektorer.

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} + (-\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Linjärkombination som blir noll utan att alla koefficienter är noll.

Pss

Tre vektorer spänner upp ett 3-dimensionellt rum

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + s_3\mathbf{u}_3,\ s_i \in \mathbb{R}$$

såvida inte de tre vektorerna ligger i ett plan, dvs om en av dem kan skrivas som en linjärkombination i de andra.

$$\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 + (-a)\mathbf{u}_2 + (-b)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

Om kolonnerna i en för en 3×3-matris A är linjärt beroende är Im(A) är högst ett plan (kanske en linje eller en punkt).

Linjärkombination som blir noll utan att alla koefficienter är noll.

Då kan A**x**=**b** sakna lösning eller ha oändligt många lösningar.

Linjärt (o)beroende

De n vektorerna $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ sägs vara **<u>linjärt beroende</u>** om

$\exists i, s_i \neq 0$ och $\sum s_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$

Rum behöver inte vara 3-dimensionella

T ex $s_1 \neq 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{s_2}{s_1}\mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{s_n}{s_1}\mathbf{u}_n$

Mao linjärt beroende om de ligger i underrum, dvs rum av dimension (n-1) eller mindre.

<u>Linjärt oberoende</u>

$\sum s_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \forall i\, s_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists i\, s_i \neq 0 \Rightarrow \sum s_i\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \forall i\, s_i = 0$ eller $\sum s_i\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$

Kan kollas genom att lösa ett ekvationssystem.

Negationen av linjärt beroende

Linjärt oberoende

- Man kan maximalt ha n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Om A är en n×m-matris med r linjärt oberoende vektorer så är Im(A) ett rum av dimension r.
- n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende omm matrisen med vektorerna som kolonner har determinant 0. (Argumentet kommer växa fram när vi pratar om lösning av linjära ekvationssystem.)