Linjär algebra

Föreläsning 5

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

Idag

- Linjära ekvationssystem
- Egenvektorer och egenvärden

- Korrigeringar
  - S3: Byt Q4 mot R4
  - T1a: Skippa ledningen

Att lösa linjära ekvationssystem

- Substitutionsmetod
- Gausselimination och bakåtsubstitution –mycket bättre för linjära ekvationssystem.
- I undantags fall kan man vilja lösa systemet genom att multiplicera med invers till A. (Bara aktuellt för kvadratiska koefficientmatriser.)

Gausselimination

Elementära radoperationer

1. Multiplicera rad med konstant ≠ 0.
2. Addera en rad till en annan.
3. Byta plats på två rader.

Två matriser A, A' som skiljer sig på radoperationer kallas radekvivalenta. Skriver $A \sim A'$

Sats: Om (A|b) $\sim$ (A'|b') så har de samma lösningsmängd.

Exempel på Gausselimination och bakåtsubstitution …

Gausselimination görs enklast på totalmatrisen !!

Gausseliminationens resultat

p_i kallas pivotelement

Antal obekanta=m

$$(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} p_1 & & & & & & & b'_1 \\ 0 & \cdots & p_2 & & & & & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_3 & & & & b'_3 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 & p_r & \cdots & b'_r \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & b'_n \end{array}\right) \sim (T|\mathbf{b}')$$

Kallas trappformad matris.

I $(T|\mathbf{b}')$ är vissa saker lättare att se än i $(A|\mathbf{b})$ t ex följande.

- Finna lösningsmängden, genom bakåtsubstitution.
- Se hur många rader i A som är linjärt oberoende, Rang(A).
- Avgöra om Det(A)=0 (bara om m=n, dvs kvadratiskt)
- Avgöra om A har invers (bara om kvadratiskt)
- Finna vilka kolonner i A som spänner upp Im(A).

Lösningsmängd

Vad ger nu bakåtsubstitution?

- Om någon av $b'_{r+1},\cdots,b'_n$ är skild ifrån 0 så saknas lösning. (Dvs om Rang((A|b))>Rang(A) så saknas lösning.)
- Om $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ finns lösning och variablerna som härrör från kolonner utan pivotelement parametriserar lösningen, dvs lösningsmängden blir (m-r)-dimensionell.
- Har unik lösning omm $b'_{r+1}=\cdots=b'_n=0$ och m=r.
- Om högerleder **b=0** finns alltid lösning. Systemet kallas då ett homogent system. Dess lösningsmängd kallas kärnan, eller nollrummet, och betecknas Ker(A), dvs

$$Ker(A) = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Rader i A och T

- Varje rad i T är en linjärkombination av rader i A. Omvänt är varje rad i A en linjärkombination av rader i T.
- Varje linjärt samband mellan rader i A ger linjärt samband mellan rader i T och omvänt.
- Raderna i A är linjärt beroende omm raderna i T är linjärt beroende.
- Antalet linjärt oberoende rader i A och i T är det samma.
- Rang(A)=Rang(T), dvs antalet linjärt oberoende rader i A är lika med antalet linjärt oberoende rader i T.
- Rang(T)=r, (därmed även Rang(A)=r) i enligt beteckningar i förrförra bilden.
- Raderna i T är linjärt beroende (därmed även raderna i A) omm T har en nollrad.

Kolonner i A och T

- Ett linjärt samband mellan kolonner i A är en punkt i Ker(A).
- Pss är ett linjärt samband mellan kolonner i T en punkt i Ker(T)
- Ker(A)=Ker(T), båda ha samma lösningsmängd.
- De kolonner i T som innehåller pivotelement är linjärt oberoende. Då övriga är linjärt beroende av dessa.
- De kolonner i A som motsvarar kolonner i T som innehåller pivotelement är linjärt oberoende. Då övriga är linjärt beroende av dessa.
- Im(A) spänns upp av de linjärt oberoende kolonnerna i A.

- OBS 1: Radrang=Kolonnrang !
- OBS 2: dim(Ker(A)) = m-r och dim(Im(A)) = r $\Rightarrow$
  dim(Ker(A))+dim(Im(A)) = m (= antal obekanta).

Kvadratiska matriser 1
Det(A) och Det(T)

- Elementär radoperation:
  - B fås genom att multiplicera en rad i A med $\lambda \neq 0$.
    Då är Det(B)=λ Det(A).
  - B fås genom att addera en rad i A till en annan rad i A.
    Då är Det(B)=Det(A).
  - B fås genom att byta plats på två intilliggande rader i A.
    Då är Det(B)=-Det(A).

  Detta kan tex ses genom att utveckla längs den rad i B som modifierats i jämförelse med A.
- Alltså gäller att Det(A)=0 omm Det(T)=0.
- Det(T)=produkten av diagonalelementen.

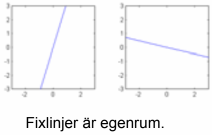
Hur ser man det?

Kvadratiska matriser 2
Invers till A?

A inverterbar omm Det(A) $\neq$ 0!
- Om det Det(A)=0 saknas invers eftersom
  1=Det(I)=Det(AA^{-1})=Det(A)Det(A^{-1}) medför att Det(A) $\neq$ 0.
- Omvänt, antag Det(A) $\neq$ 0. Vill nu lösa $AX = I$.
  - Löser successivt $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i,\ i = 1, \cdots, n$
  - Det(A)$\neq$ 0 omm Det(T)$\neq$ 0 omm pivotelementen i T står i diagonalen. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i,\ i = 1, \cdots, n$ unika lösningar.
  - Dessa lösningar blir kolonner i X.

OBS: Det(A)$\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ A ger injektiv funktion $\Leftrightarrow$ S ger surjektiv funktion $\Leftrightarrow$ Ker(A)={**0**}

Visualisering av egenrum



Fixlinjer är egenrum.

Dynamiskt Matlabskript

Egenvektorer (n$\times$n-matriser)

- **v** $\neq$ 0 kallas <u>egenvektor</u> om det finns tal λ så att A**v**=λ**v**.
- Talet λ kallas då för egenvektorns <u>egenvärde</u>.
- Lustigt nog är det lättast att först räkna ut λ och sedan använda detta för att finna **v**.
- A**v**=λ**v** $\Leftrightarrow$ (A-λ I)**v**=**0**.
- Har icketrivial lösning omm Det(A-λ I)=0 som blir en n:te-grads ekvation.
- För en av lösningarna λ_1 till ekvationen finner man egenrummet, dvs rummet av alla egenvektorer med egenvärde λ_1 genom att lösa ekvationssystemet (A-λI | **0**).