Linjär algebra
Föreläsning 6

D-linjen, Chalmers
2002

Samuel Bengmark

Idag

- Egenvektorer och egenvärden
- Att finna matriser som gör det man vill
- AV=VD och diagonalisering
- Minsta kvadrat metoden

Egenvektorer (n$\times$n-matriser)

- **v** $\neq$ 0 kallas <u>egenvektor</u> om det finns tal λ så att A**v**=λ**v**.
- Talet λ kallas då för egenvektorns <u>egenvärde</u>.
- Lustigt nog är det lättast att först räkna ut λ och sedan använda detta för att finna **v**.
- A**v**=λ**v** $\Leftrightarrow$ (A-λ I)**v**=**0**.
- Har icketrivial lösning omm Det(A-λ I)=0 som blir en n:te-grads ekvation.
- För en av lösningarna λ_1 till ekvationen finner man egenrummet, dvs rummet av alla egenvektorer med egenvärde λ_1 genom att lösa ekvationssystemet (A-λI | **0**).

Hitta matris som gör det man vill

En linjär avbildning från $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestäms helt av vad den gör med m linjärt oberoende vektorer.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{n\times m} \underbrace{\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}}_{m\times m} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_m \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}}_{n\times m}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_m \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}^{-1}$$

Invers finns eftersom linjärt oberoende kolonner

Rotation

Rotation med α radianer i $\mathbb{R}^2$ ges av matris R_α sådan att

$$R_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

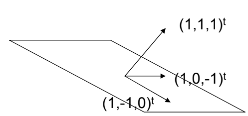
Rotation med α radianer kring y-axeln i $\mathbb{R}^3$ ges av matris $R_{y,\alpha}$ sådan att

$$R_{y,\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Titta på Matlabexempel: Roterande kub i $\mathbb{R}^3$

Exempel, projektion på plan i $\mathbb{R}^3$

- Låt Π vara ett plan i $\mathbb{R}^3$ givet av x+y+z=0.



$$P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Titta på Matlab exempel: projektionsexempel1 och skugga

Projektion

Anta $\mathbb{R}^n$ skall projiceras på m-dimensionellt linjärt delrum Π.

- Projektionsriktningar avbildas på 0, dvs är egenvektorer med egenvärde 0.
- Vektorer i Π avbildas på sig själva, dvs är egenvektorer med egenvärde 1.

$$P\mathbf{x}_i = 0,\ 1 \le i \le n-m$$
$$P\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i,\ n-m < i \le n$$

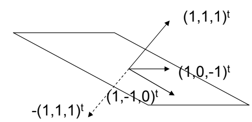
Dessa sätts samman till …

$$P\begin{pmatrix} | & \cdots & | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-m} & \mathbf{x}_{n-m+1} & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | & | & \cdots & | \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{y}_{n-m+1} & \cdots & \mathbf{y}_n \\ | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

Om $\mathbf{x}_i$ linjärt oberoende så kan vi invertera och finna P.

Exempel, spegling i plan i $\mathbb{R}^3$

Låt Π vara ett plan i $\mathbb{R}^3$ givet av x+y+z=0.



$$S\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Titta på Matlab exempel: speglingsexempel1

Spegling

Anta $\mathbb{R}^n$ skall speglas på m-dimensionellt linjärt delrum Π.

- Speglingsriktning $\mathbf{x}_i$ avbildas på $-\mathbf{x}_i$, dvs är egenvektorer med egenvärde -1.
- Vektorer i Π avbildas på sig själva, dvs är egenvektorer med egenvärde 1.

$$S\mathbf{x}_i = -\mathbf{x}_i,\ 1 \le i \le n-m$$
$$S\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i,\ n-m < i \le n$$

Dessa sätts samman till …

$$S\begin{pmatrix} | & \cdots & | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-m} & \mathbf{x}_{n-m+1} & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | & | & \cdots & | \\ -\mathbf{x}_1 & \cdots & -\mathbf{x}_{n-m} & \mathbf{y}_{n-m+1} & \cdots & \mathbf{y}_n \\ | & \cdots & | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

Om $\mathbf{x}_i$ linjärt oberoende så kan vi invertera och finna S.

AV=VD och ibland A=VDV^{-1}

$$AV = A\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = VD$$

Om en n×n-matris har n linjärt oberoende egenvektorer så vet man hur den verkar, ty egenvektorerna utgör bas och

$$A\mathbf{x} = A\sum a_i\mathbf{v}_i = \sum a_i A\mathbf{v}_i$$

Om en n×n-matris har n linjärt oberoende egenvektorer så kan man bestämma matrisen ty då är V inverterbar och $A=VDV^{-1}$

Vad säger detta om A^n´s egenvektorer och egenvärden?

Då gäller att $A^n=VD^nV^{-1}$ ty

$A^n=VDV^{-1}VDV^{-1} \ldots VDV^{-1}VDV^{-1}=VDD \ldots DDV^{-1}=VD^nV^{-1}$

Nästa vecka skall vi använda detta för att bättre begripa kvadratiska former.

Minsta kvadratmetoden

Om A**x**=**b** saknar lösning

så är en lösning till

$A^tA\mathbf{x}_0=A^t\mathbf{b}$

den bästa approximationen

i meningen att

$|A\mathbf{x}_0-\mathbf{b}| \le |A\mathbf{x}-\mathbf{b}|$ för alla **x**.

Hur ser man att det är så?

$$\begin{aligned}
& \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \text{ har minimal längd} \\
\iff & \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \perp \text{planet} \\
\iff & \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \perp \text{varje vektor i planet} \\
\iff & \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \perp A\mathbf{x} \quad \forall\mathbf{x} \\
\iff & A\mathbf{x}\cdot(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = 0 \quad \forall\mathbf{x} \\
\iff & (A\mathbf{x})^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = 0 \quad \forall\mathbf{x} \\
\iff & \mathbf{x}^tA^t(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) = 0 \quad \forall\mathbf{x} \\
\iff & \mathbf{x}^t(A^t\mathbf{b} - A^tA\mathbf{x}_0) = 0 \quad \forall\mathbf{x} \\
\iff & A^tA\mathbf{x}_0 = A^t\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Här har jag använt följande två viktiga observationer.

1. Skalärprodukt kan beräknas med hjälp av matrismultiplikation. $x \cdot y = x^t y$.
2. $(AB)^t=B^tA^t$