Linjär algebra

Föreläsning 7

D-linjen, Chalmers

2002

Samuel Bengmark

Idag

- Egenvektorer, egenvärden och AV=VD
- Diagonalisering
- Kvadratiska former
- Repetition

AV=VD

Skriver ihop all info om egenvärden och egenvektorer i ett matrissamband.

$$AV = A\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = VD$$

- Detta gäller även om vissa av egenvärdena, och därmed deras egenvektorer, visar sig vara komplexa. Kolla t ex med rotationsmatris i planet.
- $A^kV=VD^k$ dvs A^k har egenvärden λ_i^k med samma egenvektorer $\mathbf{v}_i$ som A.
- Det(A)=$\lambda_1 \cdots \lambda_n$

Hur ser man det?

A=VDV^{-1}

- Om egenvektorerna är linjärt oberoende finns V^{-1} och:
  - $A=VDV^{-1}$ och $A^k=VD^kV^{-1}$
  - $D=V^{-1}AV$
- Olika egenvärden ger linjärt oberoende egenvektorer, ty

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_1 - Ak\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 - kA\mathbf{x}_2 = \lambda_1\mathbf{x}_1 - k\lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_1\mathbf{x}_1 - \lambda_2\mathbf{x}_1 = (\lambda_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

- d linjärt oberoende egenvektorer med samma egenvärde spänner upp ett d-dimensionellt egenrum där alla vektorer är egenvektorer, ty

$$A(\underbrace{a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2}_{=\mathbf{x}}) = aA\mathbf{x}_1 + bA\mathbf{x}_2 = a\lambda\mathbf{x}_1 + b\lambda\mathbf{x}_2 = \lambda(\underbrace{a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2}_{=\mathbf{x}})$$

Inlämningsuppgift 2

- $\mathbf{x}_{k+1}=A\mathbf{x}_k$ ger $\mathbf{x}_{k+1}=A^{k+1}\mathbf{x}_0$.
- A har linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ så det finna a och b så att $\mathbf{x}_0=a\mathbf{v}_1+ b\mathbf{v}_2$.
- $\mathbf{x}_k=A^k\,\mathbf{x}_0=A^k(a\mathbf{v}_1+ b\mathbf{v}_2)=a\lambda_1^k\mathbf{v}_1+b\lambda_2^k\mathbf{v}_2$
- Gå igenom de olika fallen:
  - $\lambda_1<1$ $\lambda_2>1$, $A^k\mathbf{x}$ asymptotiskt längs $\mathbf{v}_2$ då $k \to \infty$
  - $\lambda_1<1$ $\lambda_2 = 1$, $A^k\mathbf{x}\to b\mathbf{v}_2$ då $k \to \infty$
  - $\lambda_1,\lambda_2<1$, $A^k\mathbf{x}\to 0$ då $k \to \infty$.
  - Komplexa egenvärden.
- Rita upp och jämför med hur D^k verkar i planet.

Kvadratiska former

- $x^2+y^2=r^2$ (Cirkel i $\mathbb{R}^2$)
- $ax^2+by^2=c^2$ (Elllips i $\mathbb{R}^2$)
- $x^2+y^2+z^2=r^2$ (Sfär i $\mathbb{R}^3$)
- $ax^2+by^2+cz^2=d^2$ (Ellipsiod i $\mathbb{R}^3$)
- Pss med paraboloid, hyberbel …

Är alla exempel på kvadratiska former.

Mer generellt är en kvadratisk form en summa av kvadratiska monom x_ix_k där eventuellt i=k.

- Kvadratiska former kan uttrycks med hjälp av (symmetriska, $A^t=A$) matriser:

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = (x\;y\;z)\begin{pmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax^2+dy^2+fz^2+bxy+cxz+eyz$$

Kvadratisk form kan "begripas" genom diagonalisering

- Antag p=$\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$.
- Byt koordinater genom bytet $\mathbf{x}=V\mathbf{y}$.
- Får då att $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}=(V\mathbf{y})^t A(V\mathbf{y})=\mathbf{y}^t(V^t AV)\mathbf{y}$
- Om A symmetrisk om man normerar egenvektorerna får man det oväntade sambandet $V^{-1}=V^t$

Låt oss kolla detta på tavlan

- Finner att $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}=\mathbf{y}^t D\mathbf{y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$
- Om t ex alla egenvärden är positiva ger detta en ellipsoid

Kvadratiska former dyker upp

4-grads polynom i 1 variabel:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \underbrace{a_2 x^2}_{kvad.form} + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

3-gradspolynom i 2 variabler

$$p(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \underbrace{a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2}_{\text{kvadratisk form}} + a_{30}x^3 + a_{21}x^2 y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

Även när man studerar andra funktioner än polynom än har man nytta av kvadratiska pga Taylorutveckling.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Detta kommer ni använda i kommande kurser för att hitta max och min punkter.

Allt hänger ihop*

Om A är en n×n-matris så är följande påståenden ekvivalenta.

1. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ har en entydig lösning.
2. Raderna i A är linjärt oberoende
3. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.
4. Det(A) $\neq$ 0.
5. Ker(A) = $\{\mathbf{0}\}$
6. A motsvarar en injektiv avbildning
7. Im(A)=$\mathbb{R}^n$
8. A motsvarar en surjektiv avbildning
9. A motsvarar en bijektiv avbildning
10. A har inversmatris.
11. A har inte egenvärdet 0.

Skulle du kunna argumentera för detta?

* även utanför Universeum

Exempel: A en 3×3-matris

Rang(A)	Det(A)	Ker(A)	Im(A)	Invers
3	$\neq 0$	**0**	Hela $\mathbb{R}^3$	Ja
2	0	En linje	Ett plan	Nej
1	0	Ett plan	En linje	Nej
0	0	Hela $\mathbb{R}^3$	**0**	Nej

Rangen är ett finare mått än determinanten!

Exempel på frågeområden

- Avbildningar:
  - Vad gör den linjära avbildningen med objektet (punkten, linjen, parllellogrammen …)? Vilken linjär avbildning gör följande (rotation, spegling …)? Vilka egenskaper har avbildningen?

  Har du koll på hur det verkar på n linjärt oberoende?

  Vad är verkan enkel $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$.
- Ekvationssystem:
  - Vilka lösningar har … (existens, entydigt, linje, plan …)? Finns ekvationssystem som har … ?

  Gausseliminera
- Algebra:
  - Vilka räkneregler gäller? När finns invers?
- Vektorer:
  - Vad spänner vektorerna … upp (parametrisering, linjärt oberoende…)? Hur ligger planen och linjerna? Finns planet och linjerna?

Linjär algebra dyker upp

- IFS
- 3-D grafik och 4×4-matriser
- Derivering linjär funktion(al)
- Matris algebra, jmf med tal, Boolska algebror och polynom
- Polynom eller trigonometriska funktioner som vektorer.
- SVD och sökmotorer