

A **Vektorer**

2. Vi ges en relation på mängden av riktade sträckor som vi skall visa är en ekvivalensrelation, dvs att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

reflexivitet: Den riktade sträckan \mathbf{x} har ju samma längd som sig själv och även samma riktning som sig själv, alltså gäller $\mathbf{x}R\mathbf{x}$.

symmetri: Om \mathbf{x} har samma längd som \mathbf{y} har ju \mathbf{y} samma längd som \mathbf{x} . P.s.s. med deras riktningar.

transitivitet: Om \mathbf{x} har samma riktning som \mathbf{y} och \mathbf{y} har samma riktning som \mathbf{z} , har ju \mathbf{x} samma riktning som \mathbf{z} . P.s.s. med deras längder.

C **Skalär produkt**

4. Vi använder att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$ för att se att

$$VL = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = HL - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Detta betyder att $VL=HL$ precis då $0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$, dvs då $\alpha = \pi/2$.

D **Vektorprodukt**

3. Arean av ett parallelogram ges av $B \cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren i avsnittet i fråga (där vi nu tänker oss att \mathbf{u} och \mathbf{v} är godtyckliga vektorer i \mathbb{R}^3) ser vi att $B = |\mathbf{u}|$ och $h = |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$ där α är vinkeln mellan vektorerna. Vi inser att arean ges av $B \cdot h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

E **Volym**

4. Volymen ges av $B \cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren ser vi att $B = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ och $h = |\mathbf{a}| \cos \alpha$ där α är vinkeln mellan $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ och \mathbf{a} . Vi finner att volymen ges av $B \cdot h = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}| \cos \alpha = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.

G **Plan**

3. Om punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ligger i ett plan som har normalvektor $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ så måste

ju vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ vara en vektor i planet, dvs den måste vara ortogonal mot normalen. Detta betyder att

$$0 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0).$$

Flyttar vi om lite får vi $n_x x + n_y y + n_z z - n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0 = 0$ som då är skrivet på den vanliga formen $Ax + By + Cz + D = 0$.