Inlämningsuppgift 2

Ni skall lösa inlämningsuppgiften i er grupp. Lämna in i pappersform eller digitalt (samuel@math.chalmers.se). Er lösning skall innehålla era Matlab-kommandon samt ev bilder. Skriv under med gruppnummer samt namn och personnummer på de personer som deltagit i lösningen av uppgiften. Denna inlämningsuppgift kan ge 1 bonuspoäng.

A Markov kedjor och populationsmodeller

Antag att en zoolog modellerar den skånska populationen av rävar och kaniner. Låt R_n och K_n vara antalet rävar respektive hundratals kaniner år n och antag att de beror på varandra enligt följande samband

$$R_{n+1} = 0.6R_n + 0.4K_n, K_{n+1} = -0.125R_n + 1.2K_n$$

1. Förklara hur zoologen kan ha resonerat när han satte upp dessa samband.

2. Plotta ut antalet rävar och antalet hundratals kaniner de närmaste 20 åren i ett koordinatsystem som har antalet rävar på x-axeln och antalet hundratals kaniner på y-axeln. Antag att du år noll har 50 rävar och 1500 kaniner (15 hundra kaniner). Vad ser ut att hända?

3. Uttryck de två linjära sambanden ovan som ett matrissamband och låt koefficient-matsisen betecknas med A Använd kommandot *eig* för att beräkna egenvärden och egenvektorer till A.

4. Rita in egenrummen, d v s i detta fall de linjer som spänns upp av egenvektorerna, i bilden du plottat.

5. Beräkna i Matlab egenvektorer och egenvärden till A^k för värdena $k = 2, 3, 4, 100$. Hur förhåller de sig till varandra?

6. Genom att uttrycka en godtycklig punkt i planet som en linjärkombination av egen-vektorerna till A kan man förklara det ni ser i er plot? Gör det! (Detta är en central insikt för denna labb)

Frivilligt

7. Vad händer om zoologen byter ut koefficient a_{22} från 1.2 mot 1.05 i koefficientmatrisen. Vad händer då? Rita motsvarande plot, inklusive egenrum, och förklara vad som orsakar skillnaden mot förra modellen.

8. Förändra nu koefficinten a_{22} så att antalet rävar går mot ett positivt och ändligt värde när tiden går? Vad händer med kaninerna då? Skapa motsvarande plot.

9. Förändra nu koefficienten a_{11} från 0.6 till 0.9 och låt återigen a_{22} vara 1.05. Gör motsvaranda plot. I denna modell får man tänka sig att Skåne inte är isolerat utan att det kan vandra in djur från Halland. Vad kommer att hända med djuren på lång sikt? Beräkna koefficientmatrisen egenvärden och egenvektorer. Kan du använda dem för att argumentera för er observation?

Ännu frivilligare

10. Slutligen skapar vi en kanske något mera verklighetstrogen modell genom att lägga till ett slumpmässigt bidrag av lämplig storlek.

$$R_{n+1} = 0.6R_n + 0.4K_n + ar_1, K_{n+1} = -0.125R_n + 1.05K_n + ar_2$$

    där r_i är slumptal, säg mellan 0 och 1, och a är en konstant. Vad händer nu med djurenbeståndet? Gör en plot.

11. Vad händer nu med djurenbeståndet på lång sikt? Har ni någon hypotes? Kan följande fråga hjälpa er bekräfta den:
    Vad skall $\mathbf{e}$ vara för att $\mathbf{e} = A * \mathbf{e} + a(0.5\ 0.5)^t$?