Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 020828

1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -35 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b) $dim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} = 0$

(c) Eftersom vi inte bytt platser på rader eller multiplicerat någon rad med konstant är

$$Det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = Det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 5$$

2. (a) Planets normal skall vara normal mot $(2,0,2)^t - (0,2,0)^2 = (2,-2,2)^t$ och $(2,-1,0)^t - (0,2,0)^t = (2,-3,0)^t$. Alltså ges normalen av $(2,-2,2)^t \times (2,-3,0)^t = (6,4,-2)$. Då planet passerar genom $(0,2,0)$ får planet ekvationen

$$0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 6x + 4y - 2z - 8.$$

(b) Söker alltså lösning till ekvationssytemet

$$\begin{cases} \text{6x+4y-2z=8} \\ \text{2x-2y+z=1} \\ \text{x+y-z=-2} \end{cases}$$

Om man delar den övre ekvationen med 2 får man samma ekvationssystem som i uppgift 1. Alltså är skärningspunkten $(1,4,7)$.

3. Placera kuben i origa med kanter längs koordinataxlarna. Då ges ena sida av vektorn $s = (l,0,0)^t$ och ena diagonalen av $d = (l,l,l)^t$. För att beräkna vinkeln α mellan dessa ser vi att

$$\cos\alpha = \frac{s \cdot d}{|s||d|} = \frac{l^2 + 0 + 0}{\sqrt{l^2 + 0 + 0}\sqrt{l^2 + l^2 + l^2}} = \frac{l^2}{l^2}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Detta innebär $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. (a) Under den första minuten verkade det fullas med 2 centimeter per minut. Det skulle innebära att det skulle ta 75 minuter att få 150 cm vattendjup.

(b) Söker linje $y = kx + m$ så att

$$\begin{cases} \text{0=k0+m} \\ \text{2=k1+m} \\ \text{5=k2+m} \\ \text{8=k3+m} \end{cases} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ där } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Får att

$$A^t A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 36 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Får att lösningen i minstakvadratmening,d v s lösningen till $A^t A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är $(k,m) = (2.4, 0.4)$, d v s linjen ges har ekvationen $y = 2.4x + 0.4$.

(c) Löser $150 = 2.4x + 0.4$ och finner att då är $x = \frac{149.6}{2.4} = 62\frac{1}{3}$ minuter.

5. (a)
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(c) Ett godtyckligt element kan skrivas på formen
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(d) Observera att $\mathbb{C}$ har basen $1, i$ över $\mathbb{R}$ så kan varje element skrivas på formen $a+bi$. Vidare ser vi att det finns en relation mellan baselementen så att $i^2+1=0$. Samma relation gäller för baselementen i (b) ovan, nämligen
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Beräkningar ger att A här egenvärden $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ med motsvarande normerade egenvektorer $(0,1,0)^t$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^t$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2$
Ser då att $A = VDV^{-1}$ så att
$$lim_{n\longrightarrow\infty}A^n = lim_{n\longrightarrow\infty}A^nVD^nV^{-1} = lim_{n\longrightarrow\infty}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Speciellt ser vi att gränsvärdet för startvärdet $(1,2,3)^t$ blir
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

7. Antag att $A^t = A$ och $B^t = B$. Ser då att
$$(AB)^t = B^tA^t = BA.$$

Alltså är AB symmetrisk, d v s $(AB)^t = AB$ omm $AB = BA$, d v s omm matriserna kommuterar.