Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 021216

---

1. (a) Bildar planet som innehåller de tre punkterna $(1,1,1),(1,2,3)$ och $(2,1,2)$ genom att finna normalen som

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Ser att planet får ekvationen

$$0=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=x+2y-z-2.$$

Kollar att den fjärde punkten verkligen ligger i planet genom att sätta in: $1+2(-1)-(-3)-2=0$.

(b) En linje ges enligt ovan av:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}.$$

(c) Sätter in linjen i planets ekvation 1+2(t+1)-(2t+1)-2=0t+2-2=0.

2. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&a\\1&a&2&2\\1&3&a&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&a\\0&a-3&0&2-a\\0&0&a-2&a-2\end{array}\right)$$

Om $a\notin\{2,3\}$: $(x,y,z)=(\frac{a^2+2a-12}{a-3},\frac{2-a}{a-3},-1)$.
Om $a=2$: $(x,y,z)=(2-2t,0,t)$.
Om $a=3$: Lösning saknas ty mitten ekvationen blir 0=-1.

(b) Koefficientmatrisen är inverterbar omm ekvationssysytemet har entydig lösning. Alltså finns invers omm $a\notin\{2,3\}$.

(c) Om man triangulerar totalmatrisen $(A|\mathbf{b})\sim(T|\mathbf{b}')$ finner vi att $(T|\mathbf{b}')$, och därmed $(A|\mathbf{b})$, har entydig lösning omm T har diagonalelement som alla är skilda ifrån noll. Det är prcis då vi också har lösning för alla högerled. Vi kan då lösa ekvationssystemet för högerled som motsvarar kolonner i identitetsmatrisen och på så sätt finna A^{-1}.

3. Triangelns area ges av

$$\frac{1}{2}\left|\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}1\\1\\a^2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\a^2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\a^2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2a^4+1}$$

Detta blir som minst då $a=0$ då vi får arean $1/2$.

4. (a) Eftersom vektorn $(1,2)^t$ är riktningsvektor för linjen och vektorn $(-2,1)^t$ är ortogonal mot denna så skall P skall uppfylla

$$P\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}.$$

(b) P har enligt egenvektor $(1,2)^t$ med egenvärde 1 och egenvektor $(-2,1)^t$ med egenvärde 0.

(c) Bilden blir linjen som vi projicerar på d v s linjen $y=2x$.

(d) $Dim(Ker(P))$=1 eftersom linjen genom origa med normalen som riktningsvektor blir kärnan.

(e) Eftersom D bara innehåller värdena 1 och 0 på diagonalen blir $D^{200}=D$ och vi finner att $P^{200}=P$.

5. (a) Ser att $A = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0,9 \end{pmatrix}$ ger det rekursiva sambandet.

   (b) A har egenvärden 1 och 0.78. Egenvektorn motsvarande egenvärdet 1 ger det långsiktiga förhållandet. Egenvektorn är $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, vilket ger att 5 av 11 bilar är på Landvetter.

   (c) Ser att $A\begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.646 \\ 0.354 \end{pmatrix}$ Alltså måste 0.7-0.646=0.054, dvs 5.4 procent av bilarna köras ut till Landvetter varje vecka.

6. Om vi skrivar alla vektorer uttryckta i de två linjärt oberoende vektorerna $OB = \mathbf{u}$ och $OA = \mathbf{v}$ finner vi att $BA = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ och $BC = -\mathbf{v} - \mathbf{u}$. Vinkeln melan dessa ges av

$$BA \cdot BC = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{v} - \mathbf{u}) = -|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 = 0$$

där vi i sista likheten har utnyttjat att vektorerna är lika långa eftersom de är satta sam radien i en och samma cirkel.