Matematik D del B — TMA552

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

1. (a) Ge på parameterform den linje L i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna $(2,3,3)$ och $(1,1,0)$.
   (b) Bestäm det plan Π som är vinkelrätt mot L och som innehåller punkten $(-1,0,2)$. (4)

2. (a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + z + w = & 0 \\ 2x + y + 2z + w = & 0 \\ 3y - z - w = & 0 \\ -x + 6y - 3z - 2w = & 0 \end{cases}$$
   Kontrollera ditt svar.
   (b) Ange determinanten för koefficientmatrisen.
   (c) Ange ett egenvärde och motsvarande egenvektor till koefficientmatrisen.
   (d) Ange $Ker(A)$.
   (e) Visa att vektorerna $(1,2,0,-1)^t, (1,1,3,6)^t, (1,2,-1,-3)^t$ och $(1,1,-1,-2)^t$ är linjärt beroende genom att ge en icke trivial linjärkombination av vektorerna som blir $\mathbf{0}$. (8)

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Visa att A^t är invers till B.
   (b) Ange A^{-1}.
   (c) Beräkna $Det(AB)$.
   (6)

4. A är en linjär avbildning som avbildar $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Ge matrisen A som motsvarar den linjära avbildningen.
   (b) Är avbildningen surjektiv?
   (c) Ge exempel på vektor $\mathbf{b}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning.
   (d) Beskriv hur man finner en bästa approximativ lösning, i minsta kvadratmetodens mening, i fallet med ditt valda högerled $\mathbf{b}$.
   (6)

5. Låt A, B och C vara hörnen i en triangel i planet. Låt vidare a vara mittpunkten på motstående sida till A, och på liknande sätt med b och c. Visa att $\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Cc} = \mathbf{0}$. (5)

6. En vetenskapsman förde under tre somrar anteckningar över antalet lejon och antalet hundratal zebror i en nationalpark i Afrika. Några år senare hittar man de något bristfälliga anteckningar i form av följande tabell.

1991	1992	1993
32	28	26
16	12	10

   (a) Man tar hjälp av en D-teknolog för att skapa en linjär modell för populationen. Utifrån den givna informationen finner D-teknologens följande modell.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

   Hur har D-teknologen gjort för att finna denna modell?

   (b) Kan du hjälpa till att avgöra vilken av raderna i anteckningar som motsvarar antalet lejon.

   (c) Påvisar modellen att lejonen är utrotningshotade? (7)

7. A är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sådan att för de två linjärt oberoende vektorerna $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ gäller att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ och $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$. Visa att A är en spegling i en linje och att speglingen är ortogonal om och endast om $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$. (6)