Matematik D del B — TMA552

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

1. Ett plan Π_1 innehåller punkterna $(1,0,0),(-1,-1,1)$ och $(0,2,1)$.
   (a) Skriv planet Π_1 på parameterform.
   (b) Finn ekvationen för ett plan Π_2 som inte skär Π_1. (4)

2. (a) Finn tal k så att följande ekvation är lösbar och ange motsvarande lösningsmängd.

$$\begin{cases} x+y+z+w & = & 1 \\ 3x+2y+z & = & 2 \\ -x+y-z+w & = & 0 \\ 4x+4y & = & k \end{cases}$$

   (b) Vad har lösningsmängden för dimension.
   (c) Ange koefficientmatrisens determinant. (6)

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Beräkna AB och använd sedan detta för att ge A^{-1}.
   (b) Kan du använda detta för att beräkna den matris P som projicerar punkter i $\mathbb{R}^3$ ortogonalt på planet $x+y+z=0$?
   (c) Beräkna ortogonala projektionen av punkten $(1,2,3)$ på planet $x+y+z=0$. (6)

4. (a) Punkterna $(0,0)$ och $(1,0)$ är hörn i en regelbunden sexhörning i övre halvplanet av $\mathbb{R}^2$. Ge koordinaterna för de övriga 4 hörnen. För den som glömt det vill jag påminna om att $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
   (b) Beräkna två av de tre möjliga diagonalerna, som går mellan två motstående hörn i sexhörningen, och använd sedan dessa för att visa att vinkeln mellan dem är vad man väntar sig i en regelbunden sexhörning. (6)

5. En 2×2-matris A har egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ med egenvärden 1 respektive 8.
   (a) Beräkna A^2.
   (b) Kan du "dra tredje roten ur A", d v s finna matris M så att $M^3 = A$. (6)

....vänd

6. En vetenskapsman förde under tre somrar anteckningar över antalet lejon och antalet hundratal zebror i en nationalpark i Afrika. Några år senare hittar man de något bristfälliga anteckningar i form av följande tabell.

1991	1992	1993
32	28	26
16	12	10

Man tar hjälp av en D-teknolog för att skapa en linjär modell för populationen. Utifrån den givna informationen finner D-teknologens följande modell.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(a) Hur många djur säger modellen att det fanns 1990 och 1989?

(b) Ger denna modell rimliga resultat för antalet djur som fanns för länge, länge sedan?

(c) Vad kan man säga i allmänhet om en linjärmodell som går mot ett jämviktsläge, vad säger en sådan modell om populationen för länge, länge sedan?

(8)

7. (a) Visa att för en 2×2 matris A gäller att

$$Ker(A) = Im(A) \Leftrightarrow Det(A) = Tr(A) = 0 \text{ och } A \neq \mathbf{0},$$

där $Tr(A)$, det så kallade spåret av A, är summan av matrisens element i huvuddiagonalen. (6)

Lycka till! — Samuel