Hjälpmedel: Dubbelsidigt handskrivet A4-blad (valfritt innehåll), *inga miniräknare*
Telefonvakt: Anton Evgrafov ankn.: 0740-459022

**Matematik D, del B — TMA552**

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

---

Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

1. (a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x+2y-z &= 4 \\ 2x-2y+z &= 1 \\ x+y-z &= -2 \end{cases}$$
   (b) Vad har lösningsmängden för dimension.
   (c) Ange koefficientmatrisens determinant. (4)

2. (a) Bestäm ekvationen för det plan, som går igenom punkterna $(0,2,0),(2,0,2)$ och $(2,-1,0)$.
   (b) Låt L vara skärningslinjen mellan planen $2x-2y+z=1$ och $x+y-z=-2$. Bestäm den punkt där L skär planet i uppgift (a). (6)

3. Bestäm vinkeln mellan en kant och en diagonal i en kub. (6)

4. En före detta D-teknolog skall fylla sin nyinköpta pool och mäter vattennivå i centimeter under de första 3 minuterna. Här är resultatet:

| minuter | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| vattennivå | 0 | 2 | 5 | 8 |

   (a) Hur lång tid skulle du uppskatta att det tar att få 1.5 meters vattendjup i poolen om du bara utnyttjade hur fort poolen verkade fyllas under den första minuten?.
   (b) Bestäm det linje som i minsta kvadratmening är bäst anpassad till mätpunkterna och gör sedan utifrån denna linje en ny uppskattning av hur lång tid det tar att få 1.5 meters vattendjup. (6)

5. Låt $\mathcal{M} = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}\}$. Tag $A,B \in \mathcal{M}$.
   (a) Visa att $AB \in \mathcal{M}$.
   (b) Visa att $A^{-1} \in \mathcal{M}$.
   (c) Visa att varje element i $\mathcal{M}$ kan skrivas som en linjärkombination i matriserna
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (d) Genom att skriva elementen i $\mathcal{M}$ som en linjärkombination, som i uppgift (c), kan man se att de utgör en mängd som uppför sig precis som de komplexa talen. Kan du förklara hur? (8)

....vänd

6. Antag att $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, 3 \cdots$, där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Visa att gränsvärdet $\lim_{k \longrightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ existerar för varje startvärde $\mathbf{x}_0$. Bestäm också gränsvärdet om $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)^t$. (6)

7. Visa att produkten av två symmetriska matriser är symmetrisk omm matriserna kommuterar. Minns att en matris är kallas symmetrisk om $A^t = A$. (6)

Lycka till! — Samuel