

Matematik D del B — TMA552

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!
Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

1. (a) Visa att de fyra punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, -1, -3)$ och $(2, 1, 2)$ ligger i ett plan och bestäm ekvationen för detta plan.
(b) Ge, på parameterform, en linje som ligger i planet.
(c) Visa tydligt hur du kan kontrollera ditt svar, d v s kontrollera att din linje verkligen ligger i planet. (8)

2. (a) Lös för alla värden på parametern a ekvationssystemet:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = a \\ x + ay + 2z = 2 \\ x + 3y + az = 2 \end{cases}$$

(b) För vilka värden på parametern a är koefficientmatrisen inverterbar.
(c) Argumentera för att den sats du använder som argument i (b) ovan är sann. (8)

3. En triangel har två av sina hörn i $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ och det tredje på den kurva i rummet som består av alla punkter $(1, 1, a^2 + 1)$ där a är ett reellt tal. Beräkna arean av triangeln som en funktion av a , och ange sedan för vilket värde på a som triangeln blir så liten som möjligt. (6)

4. (a) Finn den 2×2 -matris P som projicerar \mathbb{R}^2 ortogonalt på linjen $y - 2x = 0$.
(b) Ange matrisens egenvärden och egenvektorer.
(c) Ange avbildningens bild, $Im(P)$.
(d) Ange $\dim(Ker(P))$.
(e) Vad blir P^{200} ? (10)

5. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har ett kontor på Landvetter och ett vid Centralen. Av de bilar som under veckan hämtas ut i Landvetter är det en vecka senare 88% som återlämnats dit medan resten lämnats tillbaka på Centralen. För de bilar som hämtas ut på Centralen lämnas 90% tillbaka på Centralen och resten lämnas tillbaka på Landvetter.
(a) Ange en rekursionsformel uttryckt på matrisform, $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$, som beskriver hur fördelningen av bilarna ändras från en vecka till nästa.
(b) Hur stor andel av bilarna finns ute på Landvetter efter lång tid, d v s vad blir fördelningen då tiden går mot oändligheten.
(c) Man vet att 70% av utlämningarna sker på Landvetter. Hur stor del av bilarna måste i slutet på veckan flyttas från det ena kontoret till det andra om man vill börja varje vecka med 70% av bilarna på Landvetter? (8)

6. I en cirkel med medelpunkt O är A, B och C tre punkter på periferin, så att AOB utgör en diameter. Visa med hjälp av skalärprodukt att vinkeln mellan AC och BC är vinkelrät. (8)