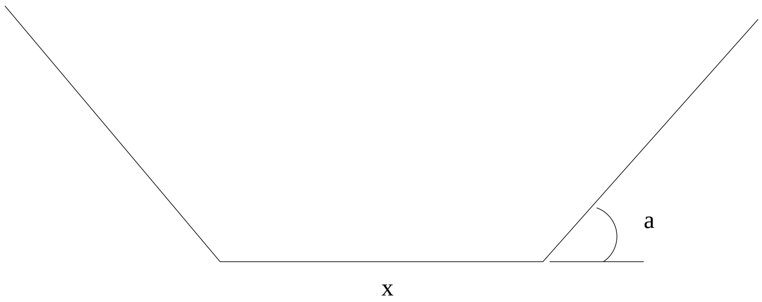
INLÄMNINGSUPPGIFTER
Matematik D, del C och Matematisk analys IT.
De enda på kursen. Redovisning under läsvecka 6

För varje uppgift erhålles 2 bonuspoäng. Sammanlagt kan Du få 2, 4 eller 6 poäng att tillgodoräkna Dig i samband med tentorna *t o m januari 2003.* D-eleverna får välja mellan uppgift 3 och 4. Den senare är en utvidgning av en uppgift på matemtik D, del B i höstas. Redovisning göres i grupper om högst fyra, någon gång under läsvecka 6. Kontakta själva en handledare/examinator.

När ni redovisar skall ni vara väl förberedda, vilket speciellt betyder att ni skall ha alla uppgifterna helt aktuella, oberoende av när ni gjort dem. Alla grafiska figurer skall ha lämplig titel och eventuella koordinataxlar skall vara markerade med aktuell variabel och adekvata skalvärden skall finnas. Självfallet skall alla resultat kunna tolkas/identifieras! Ni skall med andra ord veta vad ni har gjort. Slutligen skall redovisningen vara väl planerad och strukturerad och alla skall deltaga, med vad bör ni ha bestämt innan handledare/examinator kontaktas.

Alla uppgifterna skall redovisas vid samma tillfälle. Möjligen kan, i undantagsfall, två redovisningstillfällen accepteras, om handledaren finner skäl därtill.

Uppgift 1 En timmerränna har i genomskärning formen av en likbent parallelltrapets. Vid tillverkningen användes metallplåtar med bredden 6 m. Hur skall dessa bockas för att rännan skall rymma så mycket som möjligt?



(a) Ange tvärsnittsarean A som funktion av x och a. Ersätt gärna $\sin(a)\cos(a)$ med $\sin(2a)/2$ så fås enklare uttryck för derivator.

(b) Tabellera arean A t ex för $x = 0 : 6/50 : 6$, $a = 0 : \pi/100 : \pi/2$ i *Matlab* och lägg värdena i en matris. Använd kommandona *mesh* och *contour* för att *grovt lokalisera maximipunkten* grafiskt. Vid tabelleringen bör ni utnyttja kommandot *meshgrid*, eftersom det är bekvämt. Använd naturligtvis *help*–kommandot och tänk på att vi gjort liknade saker tidigare.

(c) Den globala maximipunkten, den sökta, satisfierar systemet

$$\begin{cases} A'_x = 0 \\ A'_a = 0 \end{cases}$$

Mata in uttrycket för arean i *Mathematica* och bestäm vänsterleden i systemet. Försök nu att ta fram den globala maximipunkten med det symboliska kommandot *solve.* Ange också den maximala arean?

Ibland går det faktisk att lösa 'små' icke-linjära problem symboliskt. Att *Mathematica* lyckades i det aktuella fallet va ju skickligt, eller hur?

Uppgift 2 Dubbelintegral över parallellogram

Vi skall nu beräkna

$$\int\int_{\Omega} (x+3y)\cos(3x+y)dxdy,$$

där $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x+2y \le 1, -1 \le 2x+y \le 1\}$. Rita de fyra räta linjerna som bestämmer området.

(a) Bestäm matrisen A och vektorn b så att $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b$ avbildar $S = \{(u,v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ på Ω. Låt t ex b svara mot nedre vänstra hörnet i parallellogrammen.

(b) Transformera, gör variabelbyte i, dubbelintegralen med avbildningen i (a).

(c) Beräkna integralen för hand och med hjälp av *Mathematica*. Jämför resultaten!

Uppgift 3 Produktionsplanering, optimering
D-elever kan välja uppgift 4 istället

I en fabrik tillverkas två produkter P_1 och P_2 av två råvaror R_1 och R_2. De senare finns tillgängliga med högst 1000 respektive 250 enheter per vecka.

Produktionen av en enhet P_1 kräver 1.0 enhet R_1 samt 0.2 enheter R_2 och produktionen av en enhet P_2 kräver 0.5 enheter R_1 samt 0.5 enheter R_2.

En enhet R_1 kostar $0.375 - 5 \cdot 10^{-5} u_1$, där u_1 är antalet enheter som används av R_1.

En enhet R_2 kostar $0.75 - 10^{-4} u_2$, där u_2 är antalet enheter som används av R_2.

Priset man kan få för varorna P_1 och P_2 är

$$p_1 = 2.00 - 0.0005 x_1 - 0.00015 x_2$$

$$p_2 = 3.50 - 0.0002 x_1 - 0.0015 x_2$$

där x_1 och x_2 är antal enheter man säljer av P_1 respektive P_2 per vecka.

Hur skall man producera för att maximera vinsten?

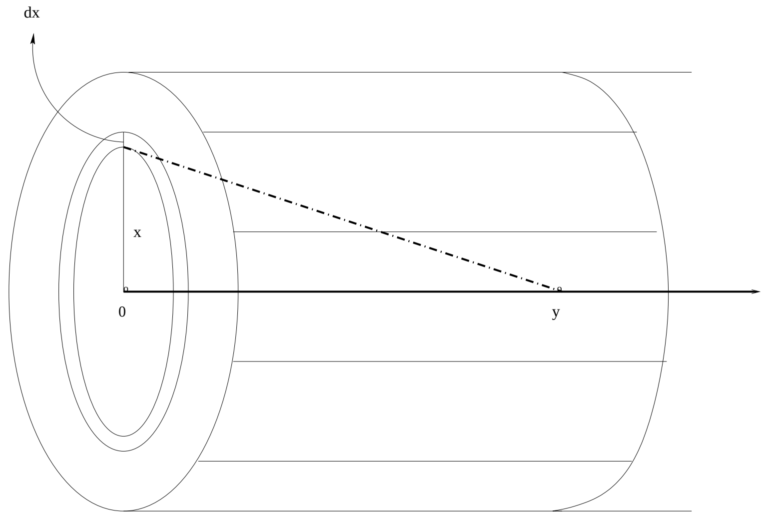
(a) Formulera uppgiften matematiskt, i x_1 och x_2, det blir ett s k QP-problem(Quadratic Programming). Se lite på Matlabrutinen *quadprog* redan nu för att se vilken struktur formuleringen skall ha. Ni skall utnyttja *Mathematica* vid den symboliska problemformuleringen, vilket underlättar högst väsentligt och förhoppningsvis även leder till rätt resultat. Det senare gäller som bekant sällan vid mera omfattande handräkning.

    Ledning: Tänk på att det kan vara svårare att formulera ett problem matematiskt än att sedan lösa det. Du bör börja med att skriva ned alla uppgifter på ett mycket mera strukturerat och begripligt sätt än ovan, lämpligen på tabellform. Därefter är halva jobbet klart.

(b) Använd nu den ovan nämnda rutinen *quadprog* för att med numerisk metod bestämma optimal produktion och motsvarande vinst per vecka.

Uppgift 4 Laddningsfördelning i stav/tråd
Endast för D-elever som ej valt uppgift 3.

Tag fram 'lab-pm' från förra kursen och gör några körningar för att bekanta er med den gamla modellen. Vi skall nu även ta hänsyn till laddningarna på tvärsnittsytorna. Låt staven vara långsträckt, då är det rimligt att låta *laddningen per area-enhet*, q säg, vara konstant på dessa ytor. Bilda ett samband mellan ρ och laddning per area-enhet på staven, genom att betrakta en tunn skiva. Använd detta för att uttrycka laddningen på tvärsnittsytorna med $\rho(0)$ respektive $\rho(1)$.



Något fullständigt recept får ni ej utan bara ett antal hållpunkter, som kanske kan vara till nytta.

1. Uttryck potentialerna svarande mot tvärsnittsytorna i punkten y. Ni får integraler, som kan evalueras symboliskt.
2. Addera potentialtillskotten till vänsterledet i (1) 'gamla labben' och kräv likhet i (1) för y-värdena $0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}, y_N, 1$. Låt de sökta approximationerna till ρ i dessa punkter heta $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N+1}$.
3. Bilda nu det linjära ekvationssystemet med $N + 2$ ekvationer och lika många obekanta. Detta kan exempelvis göras genom att införa två extra rader och kolonner i koefficientmatrisen till det gamla systemet.
4. Plotta för olika N-värden. Beräkna $\rho(0)$ med tre korrekta decimala siffror.