Lösningar, 2002-03-09
Matematik del C, D1 & Matematisk analys IT

Uppgift 1.

(a)

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

Svar: Gränsvärdet existerar ej! Beklagar det tidigare misstaget.

(b) Vi har den kända Taylorutvecklingen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \;\Rightarrow\; \cos^2(x) = 1 - x^2 + O(x^4)$$

Nu får vi direkt omskrivningen

$$\frac{\cos^2(x)-1}{x^2} = \frac{-x^2+O(x^4)}{x^2} = -1 + O(x^2)$$

Svar: Gränvärdet är -1
Anmärkning. Det går naturligtvis även att utnyttja en känd trigonometrisk formel samt att $\sin(x)/x \to 1$, då $x \to 0$.

Uppgift 2. Den efterfrågade volymen ges av

$$\pi\int_0^{\pi/2} y^2 dx = \pi\int_0^{\pi/2}\sin^3(x)dx = \pi\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(x))\sin(x)dx =$$

$$\pi\int_0^{\pi/2}\sin(x)-\cos^2(x)\sin(x)dx = \pi[-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi$$

Svar: Volymen är $\frac{2}{3}\pi$

Uppgift 3. Sätt $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$. Gradienten $\nabla f(x,y,z) = (2x,-2y,2z)$ blir normal till nivåytan $f(x,y,z) = 0$ för en punkt (x,y,z) på ytan. För punkten P fås således normalen $(2,-4,2\sqrt{2})$. Enhetsnormal $\mathbf{n} = (1,-2,\sqrt{2})/\sqrt{7}$.

Låt nu (x,y,z) vara en godtycklig punkt på tangentplanet i P. Då gäller

$$\mathbf{n}\cdot(x-1,y-2,z-\sqrt{2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x-2y+\sqrt{2}z+1=0$$

Svar: Enhetsnormal $\mathbf{n} = (1,-2,\sqrt{2})/\sqrt{7}$ och tangentplan $x-2y+\sqrt{2}z+1=0$.

Uppgift 4.

(a) Sätt $\mathbf{F} = (F_1,F_2) = (e^{\sin(x)}, e^{y^2})$. Eftersom $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$ och funktionerna är helt snälla blir kurvintegralen lika med 0, för varje sluten kurva.
Svar: Kurvintegralen är 0

(b) Vi utnyttjar först linjäriteten

$$I = \int_C (e^{\sin(x)} - x^2 y)dx + e^{y^2}dy = \int_C e^{\sin(x)}dx + e^{y^2}dy + \int_C -x^2 y dx \ .$$

Låt C parameterframställas som $x = \cos(s)\ ,\ y = \sin(s)\ ,\ 0 \leq s \leq 2\pi$ och utnyttja resultatet i a), då fås

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2(s)\sin^2(s)ds = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2s)ds$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4s)}{2}ds = \frac{\pi}{4}$$

Svar: Kurvintegralen är $\frac{\pi}{4}$.

Uppgift 5. Integrationsområdet ger direkt att det är lämpligt att gå över till polära koordinater $x = r\cos(\phi)\ ,\ \ y = r\sin(\phi)$, där $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $1 \leq r \leq \sqrt{2}$.

$$I = \int\int_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \ln(1+r^2)rdrd\phi = 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r\ln(1+r^2)dr \ .$$

Det finns många sätt att klara enkelintegralen ovan. Man kan hitta den direkt i *Beta* eller partialintegrera och då bestämma en primitiv funktion till 'faktorn' r. Gör gärna detta som övning. Vi väljer här ett tredje alternativ, nämligen

$$\int r\ln(1+r^2)dr = \frac{1}{2}F(1+r^2)\ ,\ \text{där } F'(x) = \ln(x)$$

$$F(x) = \int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

Vi sammanfattar

$$I = 2\pi\left(\frac{1}{2}F(3) - \frac{1}{2}F(2)\right) = \pi(3\ln(3) - 3 - (2\ln(2) - 2)\ ) = \pi\left(\ln(\frac{27}{4}) - 1\right) \ .$$

Hoppas det har gått bra för Dig!

- Skrivningsvisning D1: Under någon gruppövning på nästa mattekurs.
- Skrivningsvisning IT: Tid och plats meddelas på kurssidan ett par dagar före.

Jag skall göra ett försök att få skrivningsrättningen klar före påskuppehållet.

Hälsningar
Göran Starius