Lösningar, 2002-08-19
Matematik del C, D1 & Matematisk analys IT

Uppgift 1.

(a) Vi ser på derivatan $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$, $\forall x$. Således är f strängt växande och alltså inverterbar.

(b) Vi löser ut x ur ekvationen $f(x) = y$ och och får då $f^{-1}(y)$, där vi ersätter y med x och erhåller det eftersträvade uttrycket. Vi har

$$e^x - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^x - 1 = 0 \ .$$

Detta är en andragradsekvation för e^x, som vi löser på sedvanligt sätt och väljer den positiva roten

$$e^x = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} \Leftrightarrow x = \ln(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}) \ .$$

Svar : $f^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1})$

Uppgift 2.
Vi har Taylorutvecklingarna

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(0) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(0) + O(h^6)$$

$$f(-h) = f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) - \frac{h^3}{6}f'''(0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(0) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(0) + O(h^6)$$

Ur dessa fås nu direkt att

$$\frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2} = f''(0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(0) + O(h^4) \ , \ h \to 0$$

Svar : $p(h) = f''(0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(0)$.

Uppgift 3. Vi gör exempelvis variabelbytet $x = t^4$ med $dx = 4t^3dt$ och $x = 0 \leftrightarrow t = 0$ samt $x = 1 \leftrightarrow t = 1$. Detta ger

$$\int_0^1 x^{-1/4} \cdot e^x dx = \int_0^1 4t^2 e^{t^4} dt$$

.

Uppgift 4. Vi skriver funktionsytan som $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z = 0$ och utnyttjar att gradienten $(f'_x, f'_y, f'_z) = (2x_0, 8y_0, -1)$ i punkten (x_0, y_0, z_0) är normal till ytan. På samma sätt kan vi få normalen $(1, 1, 1)$ till planet $x + y + z = 0$.

De båda normalerna är parallella om det finns ett tal c, säg, så att

$$(2x_0, 8y_0, -1) = c \cdot (1, 1, 1) \ ,$$

vilket ger oss $x_0 = -\frac{1}{2}$ och $y_0 = -\frac{1}{8}$.

Svar : Endast punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{5}{16})$ uppfyller villkoret.

Uppgift 5. Vi skriver dubbelintegralen som en upprepad integral och integrerar först i x-led

$$I = \int\int_D \cos(y^2)dxdy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (\int_0^{x=y} \cos(y^2)dx)dy$$

Nu återstår endast att räkna lite med enkelintegraler

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y\cos(y^2)dy = [\sin(y^2)/2]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} \ .$$

Svar : Integralens värde är $\frac{1}{2}$.