VECKOPROGRAM för gruppövningar och självverksamhet.
Matematik D, del C och Matematisk analys IT.
Läsvecka 4

Den här veckan skall vi tillämpa våra integralkunskaper på ett antal geometriska problem, area- och volymsberäkningar samt båglängdsbestämning för kurvor. Vi skall också generalisera den vanliga enkelintegralen till så kallade kurvintegraler, då vi skall integrera över en kurva i R^2 eller R^3, istället för över ett intervall i R. Sista gruppövningen i veckan ängnas åt flervariabelanalys.

Gruppövning v4:1, (7.1 , 7.2 , 7.3) Läs lite i början på 7.1. Lägg märke till det violetta på sidan 408 och även tillhörande figur 7.4. Se därefter på exempel 1 och 2, samt kanske också på det något besvärligare exempel 6. Avsnitt 7.2 kastar vi en blick på.

Exercises 7.1: 1 , 3 , 19 , 7.2: 5 , 9 , 13

Kurvgeometri: Tangent, båglängd ...

1. Vi börjar med funktionskurvor $y = f(x)$. Läs 7.3 t o m exempel 3.
2. Exercises 7.3: 12 , 13 , 15. Använd Beta eller *Mathematica* för de två sista.
3. Nu skall vi se på kurvor på parameterform

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ a \le t \le b, \tag{1}$$

   där $x(t)$ och $y(t)$ är givna funktioner av *parametern* t.

   Övning 1:
   a) $x = \cos(t), y = sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi$. Plotta i *Matlab*.

   b) $x = 2\cos(t), y = sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi$. Plotta i *Matlab*.

   c) $x = \cos(t), y = sin(t), z = t,\ 0 \le t \le 4\pi$. Plotta i *Matlab*.

   Ledning: Använd *plot* i a) och b) men *plot3* i c).
4. Försök att 'härleda' följande formel för båglängden av (1)

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau)^2} d\tau \tag{2}$$

   med hjälp av Riemann summor. Använd nu (2) på en funktionskurva $y = f(x)$ för att kontrollera att formeln stämmer i detta specialfall.
5. Övning 2: Beräkna båglängden för kurvan i övning 1c) ovan, genom att generalisera (2).
6. Bilda sekantvektorn svarande mot parametervärdena t och $t + \Delta t$ till kurvan (1). Hur fås nu tangentvektorn $(x'(t), y'(t))$?

   Övning 3: Beräkna nu tangentvektorn till kurvan i övning 1c), för $t = \pi$.
7. Enligt (2) blir $s(t)$ strängt växande varför $s = s(t) \ \Leftrightarrow \ t = t(s)$. Sätt in $t = t(s)$ i (1), dvs inför båglängden som ny parameter. Bilda nu tangentvektorn med avseende på båglängden s, dvs $(dx/ds, dy/ds)$. Vad blir dess längd?
8. Ni kan studera punkterna 3–7 ovan i avsnitt 8.2, 8.3 och 8.4 i läroboken, om ni känner att ni behöver mera information och exempel.

Gruppövning v4:2, **Kurvor på formen** $f(x,y) = C$, där $f : R^2 \to R$ och C är en konstant. Kurvan kallas nivåkurva till funktionen f på nivå C. Är Du orienterare kanske Du tänker på höjdkurvor på en karta. Ett välkänt exempel är $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$. Vill vi rita nivåkurvor till mera komplicerade funktioner får vi ta till dator.
Exempel/övning: Låt $f(x,y) = (x^2 + \frac{1}{2}y^2)^2 - x^2 + \frac{1}{2}y^2$ och $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Vi skall rita nivåkurvor och även grafiskt åskådliggöra ytan $z = f(x,y)$ i *Matlab*. Låt mig nämna att liknande verksamheter ingår i inlämningsuppgift 1.
Vi skall använda *Matlab*-kommandona *meshgrid, contour* och *mesh*. Först skall funktionen beräknas för alla knutpunkterna i ett tänkt nät.

- $>$ x=-1:2/100:1; y=x; % maskvidden 0.02
  $>$ [X,Y]=meshgrid(x,y); % för varje knutpunkt stoppas x-korrdinaten i X och motsvarande för y.
  $>$ F=(X.^2+0.5*Y.^2).^2-X.^2+0.5*Y.^2; % det var nu lätt att tabellera f.
  $>$ contour(x,y,F);
  $>$ figure; mesh(x,y,F);

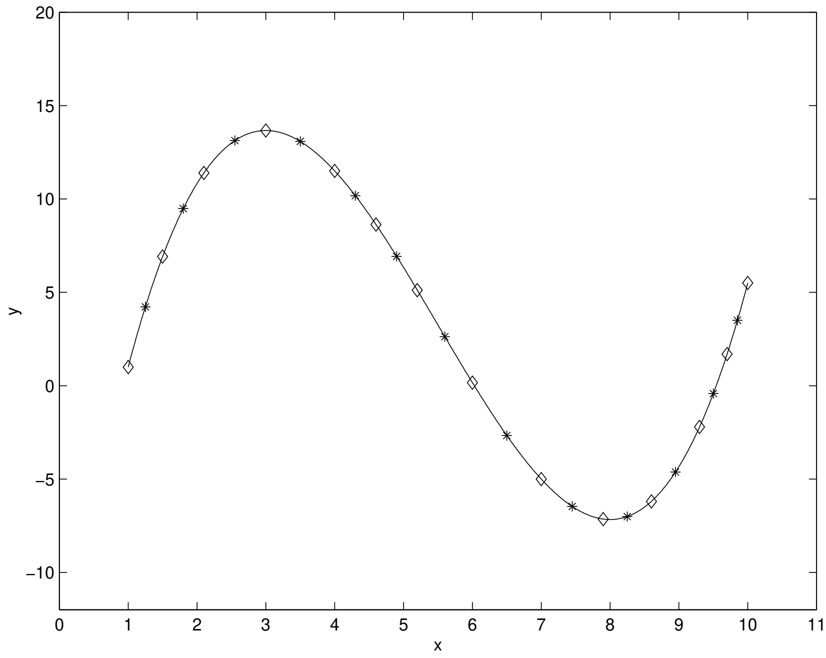
- Bestäm största och minsta värden med kommandona *max* och *min*.

- Rita nu kurvorna på nivåerna -0.1 , 0 , 0.1 , 0.2 , 0.3. Lägg märke till att för att erhålla *endast* kurvan $f(x,y) = 0$, måste vi ge kommandot contour(x,y,F,[0 0]), och motsvarande för andra nivåer.

Kurvintegraler Begreppet kurvintegral införes naturligtvis med en Riemann summa. Låt Γ vara en kurva med ändlig längd i ett xy-plan och $f(x,y)$ en funktion, som är definierad och kontinuerlig i varje fall på Γ. Dela nu in Γ i N delkurvor $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_N$ och välj på varje delkurva Γ_j en punkt P_j. Se figur nedan, där delkurvorna är separerade med $\diamond$ och punkterna på delkurvorna markerade med $*$. Vi bildar nu

$$\sum_{j=1}^{N} f(P_j) \Delta s_j \ ,$$

där Δs_j är längden av delkurva Γ_j.



Vi skall nu låta $\max \Delta s_j \to 0$, då erhålles ett gränsvärde

$$\sum_{j=1}^{N} f(P_j)\Delta s_j \ \to \ \int_\Gamma f ds. \tag{3}$$

Övning 1: Låt Γ i (3) ges av (1). Visa att

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t)^2} dt.$$

Övning 2: Ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ kan på parameterform skrivas $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$. Uttryck ellipsens bågläng med en integral. Beräkna integralen numeriskt för $a = 2$ och $b = 1$.

Övning 3: En tråd har formen av en plan kurva Γ på parameterform (1). Trådens linjära densitet, massa/längdenhet, är $\rho(x, y)$. Ange trådens massa med hjälp av en kurvintegral, som därefter omformas till en vanlig enkelintegral.

Övning 4: Antag att tråden i övning 3 har formen $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$ och $\rho(x, y) = x$. Beräkna trådens massan. Ändra densiteten till $\rho(x, y) = e^{-(x+y)}$. Kanske måste nu numerisk metod tillgripas.

Övning 5: Samma förutsättningar som i övning 4 med den skillnaden att densiteten som funktion av båglängden växer linjärt från 1 till 2 längs tråden.

Vi skall återkomma till kurvintegraler(kapitel 15) senare i kursen då vi kan mera flervariabelanalys. Bland annat skall vi studera kraftfält och ge villkor för att de har en potential, som vi ju vet från fysiken att t ex gravitationsfältet kring jorden har.

Gruppövning v4:3, (12.1 , 12.2) Vi lämnar nu den 1-dimensionella världen och tar resolut och oförväget steget ut i flervariabelanalysen. Någon fruktan för det okända behöver vi ej känna, eftersom vi redan har rekognoserat ett del.

- Läs hela avsnitt 12.1 noggrant. Lägg märke till begreppet hyperyta (eng hypersurface) som kan ses som en generalisering till hyperplan. Ett hyperplan i R^n är ju ett plan som spännes upp av $n-1$ linjärt oberoende vektorer, dvs har dimensionen 1 mindre än det aktuella rummets dimension. Motsvarande gäller för hyperytor, med den skillnaden att de ofta är krökta.
  Lägg också särskilt märke till begreppen nivåkurva och nivåyta, det förra har vi redan stiftat bekantskap med.
- Exercises 12.1: 11, 13 , 14 , 15 , 17
- Avsnitt 12.2 handlar om gränsvärden och kontinuitet för flervariabelfunktioner. Existens av gränsvärde innebär ju - informellt uttryckt - att funktionen skall närma sig ett visst värde, då argumentet närmar sig en given punkt. Lägg särskilt märke till den stora skillnaden mellan en- och flervariabelfallen vad gäller 'antalet sätt' argumentet kan närma sig en punkt. I högre dimensioner blir alltså gränsvärdesbegreppet mera krävande.
- Läs nu till och med definition 3.
- Exercises 12.2: 1 , 3 , 12 , 13 , 14 , 21 , 22