VECKOPROGRAM för gruppövningar och självverksamhet.
Matematik D, del C och Matematisk analys IT.
Läsvecka 5

Gruppövning v5:1, (12.3 , 12.4) Vi skall nu införa begreppet **partiell derivation**. Se definition 5 i avsnitt 12.3 och notera att det egentligen ej är fråga om något nytt. Vill vi exempelvis bestämma $\partial f(x_0, y_0)/\partial x$, skall vi ju derivera envariabelfunktionen $x \to f(x, y_0)$. Vi förstår att alla våra 'gamla' derivationsregler gäller. Läs allt t o m sidan 710 och bekanta er med begreppet i fråga inklusive alla beteckningar som förekommer. Här är ytterligare ett beteckningssystem: $f_1(x,y) = f'_x(x,y)$ och $f_2(x,y) = f'_y(x,y)$.

1. Vi går nu vidare till sidan 711, där tangentplan och normal till en yta $z = f(x,y)$ härledes. Beteckningarna **i**, **j** och **k** står helt enkelt för de tre enhetsvektorerna. Fundera på hur två tangenter kan bestämmas.
2. Ange planets ekvation på parameterform och eliminera därefter bort parametrarna.
3. Bilda normalen med hjälp av vektorprodukt, som i boken, och härled därefter planets ekvation.
4. Vilken linjär approximation har vi nu bestämt till $f(x,y)$ i närheten av punkten (a,b)?
5. Betrakta hyperytan $u = f(x,y,z)$ i R^4. Ange en linjär approximation i närheten av punkten (a,b,c) till $f(x,y,z)$. Skriv hyperplanets ekvation på parameterform och eliminera bort parametrarna eller bara generalisera resultatet ovan 'rakt på'.
6. Se exempel 6 och 7 samt kanske även 8.
7. Exercises 12.3: 1 , 3 , 5 , 11 , 13 , 17 , 25
8. Självverksamhet 12.3: 5 , 9 , 12 , 21 , 27

Nu ser vi lite på partiella derivator av högre ordning i avsnitt 12.4.

1. Läs sidorna 715 och 716 i avsnitt 12.4 och lägg särskilt märke till teorem 1.
2. Exercises 12.4: 1 , 3 , 5 , 13

Gruppövning v5:2, (12.5 , 12.6 , *(12.7 tages upp senare i samband med vektorfält i kap 15)*)
Kedjeregeln måste ni absolut lära er väl. Läs allt t o m exempel 6 i avsnitt 12.5. Härledning av kedjeregeln kommer först i nästa avsnitt.

1. Exercises 12.5: 1–4 , 15
2. Självverksamhet 12.5: 7 , 9 , 11 , 32
3. För vilka x-värden kan y i sambandet $x^2/4 + y^2 = 1$ *ej* ens lokalt uppfattas som en funktion av x? Rita figur! Bestäm dy/dx, för andra x-värden, med hjälp av kedjeregeln. Vad kräves för att dy/dx skall kunna lösas ut? Relatera svaret med första frågan.
4. Betrakta systemet $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, vilket vi tolkar som skärningen mellan två ytor i R^3. Låt (a,b,c) vara en punkt på den aktuella kurvan. Ge ett nödvändigt villkor för att systemet i närheten av punkten definierar y och z som funktioner av x och 'bestäm' dy/dx och dz/dx med hjälp av kedjeregeln. Lösningsmängden i närheten av punkten skall alltså kunna skrivas $(x, y(x), z(x))$. Det nödvändiga villkoret ni får fram är i själva verket också tillräckligt.

Nu skall vi på nytt syssla med linjärisering i avsnitt 12.6. Genom att kräva att vår 'tangentplansapproximation' har en viss specifiserad approximationsegenskap, fås ett villkor på den bakomliggande funktionen i den aktuella punkten, kallat *differentierbarhet*.

1. Läs allt i avsnitt 12.6 t o m teorem 5 på sidan 734.

2. Se på differentialer sidan 735. Det är bara vår gamla 'tangentialplansapproximation' med lite andra beteckningar. Sätt $|\mathbf{dx}| = \sqrt{(dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2}$, då har vi

$$\Delta f - df = |\mathbf{dx}| \cdot \rho(|\mathbf{dx}|) \ ,$$

där $\rho(|\mathbf{dx}|) \to 0$, då $|\mathbf{dx}| \to 0$, om f är differentierbar. Men om f är snällare, har kontinuerliga derivator upp t o m ordning 2, gäller ett skarpare resultat

$$\Delta f - df = O(|\mathbf{dx}|^2) \ ,$$

då $|\mathbf{dx}| \to 0$. Jämför med envariabelfallet, sidan 282 teorem 10.

3. På sidan 736 lägger ni märke till definitionen av **Jacobi matis** för vektorvärda funktioner $\mathbf{f}$ från R^n till R^m. Denna svarar mot funktionens derivata, dvs beskriver de linjära approximationerna av komponenterna i av $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} + \mathbf{O}(|\mathbf{dx}|^2)$, om $\mathbf{f}$ är tillräckligt snäll. Se även generaliseringen av kedjeregeln på nästa sida.

4. Vi har tidigare bildat s k Taylorpolynom till envariabelfunktioner kring en punkt. Man kan naturligtvis göra något motsvarande i flervariabelfallet. Låt en snäll funktion $f(x, y)$ och en punkt (a, b) vara givna. Bestäm ett polynom

$$p(x, y) = a_1 + (x - a)b_1 + (y - b)b_2 + (x - a)^2 c_1 + (x - a)(y - b)c_2 + (y - b)^2 c_3$$

så att f och p tillsammans med alla derivator upp till och med ordning två blir lika i punkten (a, b). Observera att Taylorpolynomet av grad ett blir precis 'tangentplansapproximationen' eller $f(a, b) + df$. Observera också att differential talar man i huvudsak om när man behöver en approximation till differensen

$$f(x, y) - f(a, b) = \Delta f \approx df = (x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b) \ ,$$

vilket är vanligt i samband med härledningar av diverse formler. Tänk t ex på kurvintegraler. Taylorutvecklingar behandlas utförligare - med felterm - på kommande kurser.

5. Lite träning att anväNDA ANDRa beteckningar. Bilda Taylorpolynomet av grad två till $f(x_0 + h, y_0 + k)$ kring punkten (x_0, y_0). Skriv även ned Taylorpolynomet av grad ett samt differentialen. Gör samma sak för $f(x_0 - h, y_0 + k)$ och $f(x_0 - h, y_0 - k)$.

6. Exercises 12.6: 7 , 11 , 13 , 15

7. Självverksamhet 12.6: 16 , 18

Gruppövning v5:3, (Kanske någon rest från tidigare gruppövningar , 14.1) Läs precis allt i avsnitt 14.1 och lägg naturligtvis särskilt märke till definitionen av dubbelintegral som gränsvärde av Riemann summor. Volymstolkningen av dubbelintegraler är ofta praktisk, även om integralen står för någon annan fysikalisk storhet.

1. Approximera integralen i exempel 1 med Riemann summor med hjälp av *Matlab*. Skriv en funktionsfil med antal delintervall, n säg, för sidorna som parameter. Räkna i varje fall med $n = 2, 4, 8, 16, 32$.

2. Exercises 14.1: 13 , 15 , 19

3. Självverksamhet 14.1: 14 , 17 , 21