TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 2000-08-16, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Greger Cronquist, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
===

1.(a) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten $P : (1, 0, 7)$, är parallell med planet $3x - y + 2z - 15 = 0$ och skär den räta linjen $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = z$. (4p)
(b) Bestäm spegelbilden av de två linjernas skärningspunkt i det givna planet. (4p)

2. Lös ekvationssystemet nedan för alla värden på λ, för vilka systemet har oändligt många lösningar:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + (1-\lambda)x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + (1-\lambda)x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (1-\lambda)x_4 = -3 \end{cases}. \qquad (8p)$$

3. Ekvationen $8z^5 - 40iz^4 + 6z^3 + 10(1-3i)z^2 + (3-50i)z - 15i = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

4. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}. \qquad (7p)$$

5. Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(a) Visa att $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$. (2p)
(b) Om $A^k = 0$ för något naturligt tal k, visa att $A^2 = 0$ (A som ovan). (7p)

6. Givet är en rät vinkel med spets i punkten O och ben p och q. Låt $A, B \in p$ och $C, D \in q$. Finn mängden av alla punkter M i vinkelns inre sådana att summan av areorna av trianglarna $\triangle ABM$ och $\triangle CDM$ är lika med S (konstant). (7p)

7. Visa den distributiva lagen för vektoriell produkt (inkl. lemma). (6p)

8. Förklara hur man går till väga när man försöker lösa algebraiska ekvationer av grad högre än två. Bevisa eventuella satser du tycker är relevanta. (max 8p)