Matematik CTH
Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri / Algebra & Serier del A för F1 / Kf1
Datum: 1994-11-04.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Patrik Andersson, ankn. 3569.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Givna är punkterna $A = (4; 0; -3)$ och $B = (1; -5; 2)$. Finn ekvationen för det plan, med avseende på vilket B är A:s spegelbild. (6p)

2. Lös för varje värde på parametern λ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 + 6x_4 + 15x_5 = 31 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 6x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + (\lambda+3)x_5 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + (9-\lambda)x_4 + 9x_5 = 13-\lambda \end{cases} . \quad (7p)$$

3. Den algebraiska ekvationen

$$z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i) = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (6p)

4.(a) Beräkna determinanten

$$D(z) = \begin{vmatrix} z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z & 1 \\ z^n - 1 & 2 + z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z & 1 \\ z^n & z^{n-1} - 1 & 2 + z^{n-2} & \dots & z & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z - 1 & 2 + 1 \end{vmatrix} . \quad (4p)$$

(b) Lös den algebraiska ekvationen $D(z) = 0$. (3p)

5. Låt $P(z)$ vara ett polynom med hela koefficienter. Om talet $a \neq 1$ är en hel rot till ekvationen $P(z) = 0$, visa att talet

$$\frac{P(1)}{a-1}$$

är helt. (6p)

6. Given är en (konvex) fyrhörning. På vardera sidan uppritas utanför fyrhörningen en kvadrat. Låt O_1O_3 och O_2O_4 vara sträckorna som sammanbinder diagonalernas skärningspunkter för motstående kvadratpar. Visa att O_1O_3 och O_2O_4 är lika långa och bildar rät vinkel. (6p)

7. Formulera och bevisa triangelolikheten för komplexa tal. (5p) När inträffar likhet? (1p)

8. Bevisa att en determinant inte ändras vid transponering. (6p)