TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 1999-10-23, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Altenstedt, ankn. 5379.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. **(a)** Visa att punkterna $A(2,-3,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-4,5,6)$, $D(2,-3,6)$ bildar en plan fyrhörning. (2p)
(b) Bestäm den ortogonala projektionen P' av punkten $P(1,0,1)$ på planet som går genom A,B,C,D. (6p)

2. Lös för varje värde på λ och μ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_2 + 2x_3 + \mu x_4 = 1 \end{cases} . \qquad (8p)$$

3. Låt A och B vara $n \times n$ matriser och antag att A är inverterbar. Visa att

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)\,. \qquad (7p)$$

4. Ekvationen $z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$ har två rötter vilkas kvot är i. Lös ekvationen. (7p)

5. Bestäm λ så att vektorerna

$$\begin{gathered} (\lambda+1, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, \lambda, \ldots, \lambda), \\ (\lambda, \lambda, \lambda+\tfrac{1}{3}, \ldots, \lambda), \\ \ldots \\ (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda+\tfrac{1}{n}) \end{gathered}$$

blir linjärt beroende. (8p)

6. Givet är den algebraiska ekvationen

$$(z-\alpha)^n + e^{i\theta}(z+\alpha)^n = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att alla lösningar ligger på en rät linje genom origo (i det komplexa talplanet). (4p)
(b) Lös ekvationen. (4p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektoriell produkt. (6p)

8. **(a)** Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem alltid är lösbart. (2p)

(b) Visa att ett kvadratiskt homogent linjärt ekvationssystem med inverterbar koefficientmatris endast har den triviala lösningen (= nollösningen). (3p)

(c) Visa att ett homogent linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. (3p)