**MATEMATIK**
**Chalmers Tekniska Högskola**

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

**Tentamensskrivning i**
**Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)**
Datum: 2002-01-17, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Tel.vakt: Richards Grzhibovskis tel. 0740 459022

---

1. Ekvationen $2z^4+4z^3+5z^2-3z+9 = 0$ har roten $(1+i\sqrt{3})/2$. (8p)
Bestäm, på formen $a+ib$ $(a, b \in \mathbf{R})$, samtliga lösningar till ekvationen.

2. a) Visa att planen $\pi_1$: $x+2y+z = 3$ och $\pi_2$: $3x-2y+z = -7$ är vinkelräta mot varandra. (2p)
b) Bestäm ett plan $\pi_3$ som innehåller punkten $(1, -2, 0)$ och som är vinkelrät mot både $\pi_1$ och $\pi_2$ ovan. (3p)
c) Bestäm skärningspunkten mellan planen $\pi_1$, $\pi_2$ och $\pi_3$. (3p)

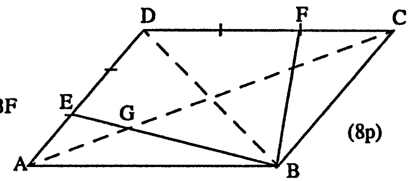
3. a) För vilka reella tal $a$ är matrisen $A$ inverterbar, där (8p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm inversen för $A$ då $a = 2$.

4. Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i punkterna (4p)
$(1, 1, 2)$, $(2, 4, 7)$, $(0, 1, 4)$ och $(1, 0, 4)$.

5. Betrakta parallellogrammen ABCD till höger. Sidorna AD och CD är vardera delade i tre lika långa sträckor (se figuren). Visa att BE, BD, och BF delar AC i fyra lika långa sträckor. (8p)




6. Avgör om polynomet (8p)

$$x^{105}+2x^{98}-x^{67}+x^{54}-2x^{26}+x$$

är delbart med $x^2-x+1$.

7. a) Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer. Beskriv i en figur projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$ och ange en formel för denna. (8p)
b) Formulera och bevisa distributiva lagen för skalärprodukt.

8. a) Formulera och bevisa Cramers regel för $3\times 3$ matriser. (8p)
b) Lös med hjälp av *Cramers regel* ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x-\ y = 0 \end{cases}.$$

Lycka till !

---

Lösning till "Linjär algebra och geometri", F1, 17/1, 2002

1. $\alpha = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ är en rot till $2z^4+4z^3+5z^2-3z+9 = 0$
Ekvationen har reella koefficienter och därmed är även $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ en rot.
Alltså är $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)\, z + |\alpha|^2 = z^2 - z + 1$ en faktor till polynomet $p(z) = 2z^4+4z^3+5z^2-3z+9$

Polynomdivision ger

$$p(z) = (z^2-z+1)(2z^2+6z+9)$$

$$\begin{array}{r|l} & 2z^2+6z+9 \\ z^2-z+1 & 2z^4+4z^3+5z^2-3z+9 \\ & -(2z^4-2z^3+2z^2) \\ \hline & 6z^3+3z^2-3z+9 \\ & -(6z^3-6z^2+6z) \\ \hline & 9z^2-6z+9 \\ & -(9z^2-6z+9) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Övriga rötter ges av ekvationen

$$2z^2+6z+9 = 0$$

$$z^2+3z+\frac{9}{2} = 0$$

$$z = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}} \text{ "}=\text{" } -\frac{3}{2} \pm \text{"}\sqrt{\frac{-9}{4}}\text{"}$$

$$z_{1,2} = \frac{-3}{2}(1 \pm i)$$

Svar: Samtliga rötter är $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $\frac{-3}{2}(1 \pm i)$.

**1a** $\Pi_1$ har normalen $\vec{n}_1 = (1,2,1)$

$\Pi_2$ har normalen $\vec{n}_2 = (3,-2,1)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 3-4+1 = 0.$$

Dvs $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ och därmed är planen vinkelräta mot varandra.

**b)** $\Pi_3$ är vinkelrät mot $\Pi_1$ och $\Pi_2$, därmed är

$$\vec{n}_3 = \tfrac{1}{2}\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(2-(-2), -(1-3), -2-6) = (2,1,-4)$$

en normal till $\Pi_3$.

Dvs $\Pi_3: 2x+y-4z+D=0$, där $D$ är en konstant.

Men $\Pi_3$ innehåller punkten $(1,-2,0)$, dvs

$$2\cdot 1 + (-2) - 4\cdot 0 + D = 0, \quad D = 0.$$

Svar: $\Pi_3: 2x+y-4z=0$.

**c)** Skärningspunkten för $\Pi_1$, $\Pi_2$ och $\Pi_3$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3x-2y+z=-7 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$$

Den utökade koefficientmatrisen ges av

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -16 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Svar: skärningspunkten är $(-1,2,0)$.

**3a** $A$ är inverterbar precis då $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & a-2 & 2 & -1 \\ -a+4 & -a+1 & a-1 & 3 \\ -1 & a-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & a-2 & -1 \\ -a+4 & -a+1 & 3 \\ -1 & a-2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & a-2 & -1 \\ -a-5 & 2a-5 & 0 \\ -4 & 2a-4 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -(a+5) & 2a-5 \\ -4 & 2(a-2) \end{vmatrix} = 2\big((a+5)(a-2) - 2(2a-5)\big)$$

$$= 2(a^2-a) = 2a(a-1).$$

Dvs $\det A = 0$ omm $a=0$ eller $1$.

Svar: $A$ är inverterbar omm $a \neq 0, 1$

**3b** Vi bestämmer inversen till $A$ då $a=2$. ($\det A = 4$)

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

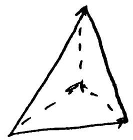
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -36 & 0 & 16 & 4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 0 & 10 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & -5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & -5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -9 & 7 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Svar: $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & -4 & 7 \\ -9 & 7 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Tetraedern "spänns" upp av vektorerna

$$\vec{u} = (2,4,7) - (1,1,2) = (1,3,5)$$
$$\vec{v} = (0,1,4) - (1,1,2) = (-1,0,2)$$
$$\vec{w} = (1,0,4) - (1,1,2) = (0,-1,2)$$



Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ges av $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$ och volymen $V$ av tetraedern är $\frac{1}{6}$ av denna. Dvs

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{13}{6}$$

---

6. Sätt $p(x) = x^{105} + 2x^{98} - x^{67} + x^{54} - 2x^{26} + x$, $q(x) = x^2 - x + 1$.

Om varje nollställe $\alpha$ till $q(x)$ är ett nollställe till $p(x)$ så är $p(x)$ delbart med $q(x)$. Om $q(\alpha) = 0$ så är också

$$0 = q(\alpha)\cdot(\alpha+1) = \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 - \alpha + 1 = \alpha^3 + 1.$$

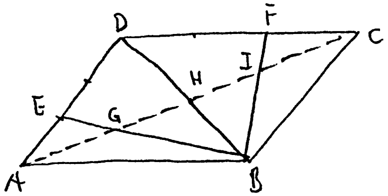
Dvs $\alpha^3 = -1$. Men

$$\alpha^{105} = (\alpha^3)^{35} = (-1)^{35} = -1$$
$$\alpha^{98} = (\alpha^3)^{32}\cdot\alpha^2 = (-1)^{32}\alpha^2 = \alpha^2$$
$$\alpha^{67} = (\alpha^3)^{22}\alpha = (-1)^{22}\alpha = \alpha$$
$$\alpha^{54} = (\alpha^3)^{18} = (-1)^{18} = 1$$
$$\alpha^{26} = (\alpha^3)^{8}\cdot\alpha^2 = (-1)^8\alpha^2 = \alpha^2$$

Detta visar att $p(\alpha) = -1 + 2\alpha^2 - \alpha + 1 - 2\alpha^2 + \alpha = 0$ !

Eftersom $q(x)$ har två olika nollställen följer att båda dessa är nollställe till $p(x)$ och därmed att $p(x)$ är delbart med $q(x)$.

5. Vi noterar att $\vec{AB}, \vec{AD}$ utgör en bas för planet.




Eftersom $\vec{AG} \parallel \vec{AC}$ så finns tal $s$ så att

$$\vec{AG} = s\,\vec{AC}$$

Men $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG}$

och $\vec{BG} = t\vec{BE}$ för något tal $t$ ty $\vec{BG} \parallel \vec{BE}$.

Dessutom är $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} \overset{!}{=} \frac{1}{3}\vec{AD} - \vec{AB}$ ty $|AE| = \frac{1}{3}|AD|$

och $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Sammantaget finner vi att

$$s\vec{AB} + s\vec{AD} = \vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AB} + t\vec{BE} = \vec{AB} + t(\tfrac{1}{3}\vec{AD} - \vec{AB}) = (1-t)\vec{AB} - \tfrac{t}{3}\vec{AD}$$

Eftersom $\vec{AB}, \vec{AD}$ utgör en bas och koordinaterna för en vektor ($\vec{AG}$) är entydiga så finner vi att

$$s = 1 - t \qquad \therefore\ 4s = 1,\ s = \frac{1}{4}$$
$$s = \frac{t}{3},\ t = 3s$$

Dvs sträcka $|AG| = \frac{1}{4}|AC|$.

Men sträckan $BD$ skär sträcka $AC$ mitt itu, dvs $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$, vilket visar att $|AG| = |GH| = \frac{1}{4}|AC|$

Av symmetriskäl följer också att sträckorna $|HI| = |IC| = \frac{1}{4}|AC|$

(Trianglarna ADB och CDB är kongruenta med E och F på motsvarande platser.)