

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Datum: 2001-10-27, 14.15 - 18.15
Hjälpmiddel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Henrik Seppänen tel. 0740 459022

-
1. a) Bestäm avståndet från punkten $P = (-1, 3, 3)$ till det plan π som innehåller punkterna $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$ och $P_3 = (1, 2, 4)$. (6p)
- b) En ljuskälla är placerad i punkten P . Den genererar en smal ljusstråle som reflekteras i punkten P_3 i det speglade planet π ovan. (4p)
Bestäm ekvationerna för linjerna som beskriver ljusstrålens bana.
(Koordinater är angivna i ett ON-system.)
2. Betrakta ekvationssystemet (7p)
- $$\begin{cases} x + y + z + 2u = 1 \\ ax + z + u = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 3 \\ y + z + au = b \end{cases}$$
- a) Bestäm determinanten för koefficientmatrisen och avgör för vilka a som ekvationssystemet har en entydig lösning.
- b) Avgör för vilka värden på a och b som systemet har mer än en lösning och bestäm lösningarna i dessa fall
3. En kvadrat med sidan två är placerad i den övre halvan av det komplexa talplanet. (6p)
Ett hörn ligger i punkten $z_1 = 1 + i$ och ena sidan, med start i z_1 , bildar vinkeln $\pi/3$ (radianer) med positiva realaxeln. Bestäm övriga hörnpunkter i kvadraten.
Rita figur och ange svaret på formen $a + bi$.
4. Lös matrisekvationen $AXB = C - 2XB$, där (7p)
- $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
5. Ekvationen $z^4 + 5iz^3 + (-7 + 3i)z^2 - 12z - 4 - 12i = 0$ har en rent komplex dubbelrot. Lös ekvationen. (7p)
6. Man säger att ett tal λ är ett egenvärde till en matris A om det finns en icketrivial lösning till ekvationen $Ax = \lambda x$. (Man säger då också att lösningen x är en egenvektor). (7p)
Låt P vara en matris sådan att $P^{-1} = P^T$ (P är en ortogonalmatris).
Visa att om $\det P = 1$ och P har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till P .
7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)
- b) Visa att om matrisen A är inverterbar så är $\det A \neq 0$. (2p)
8. a) Definiera begreppet invers matris och visa att en matris har högst en invers. (2p)
- b) Visa att om en matris har en vänsterinvers så är den inverterbar. (6p)

Lycka till !